(PHYS1)

INTRODUCTION à LA MECANIQUE

(PHYS2)

ELECTRICITE ET ONDES

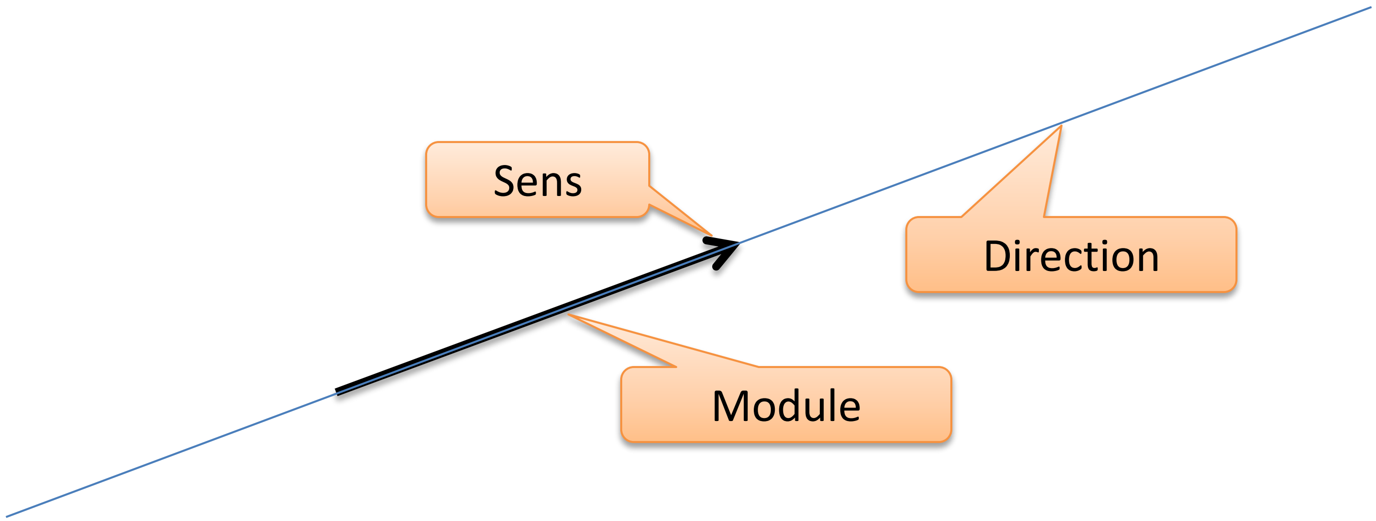
facultephysique.webnode.fr

Rappels Vectoriels **Par A.DIB**

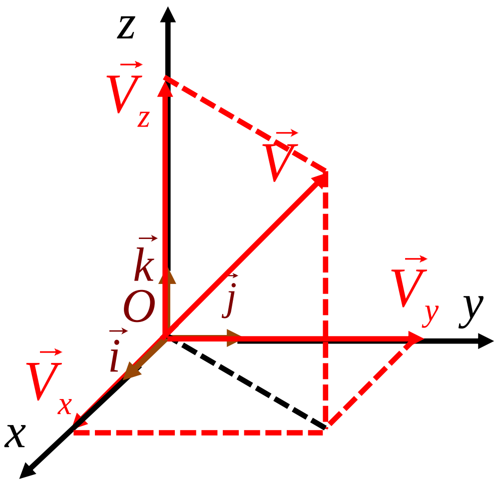
I- Définition d'un Vecteur:

Un vecteur est une grandeur définie par trois paramètres:

- Une direction : qui désigne le support du vecteur
- Un sens : qui désigne l'orientation du vecteur
- un module : qui désigne la grandeur du vecteur



II- Composantes d'un Vecteur:

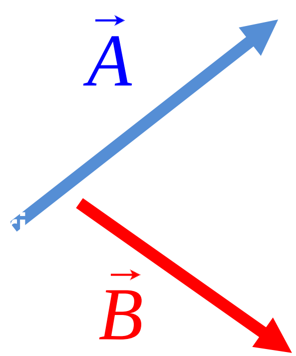


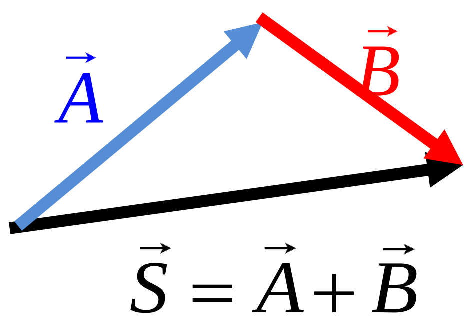
$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z = \overline{V}_x \vec{i} + \overline{V}_y \vec{j} + \overline{V}_z \vec{k}$$

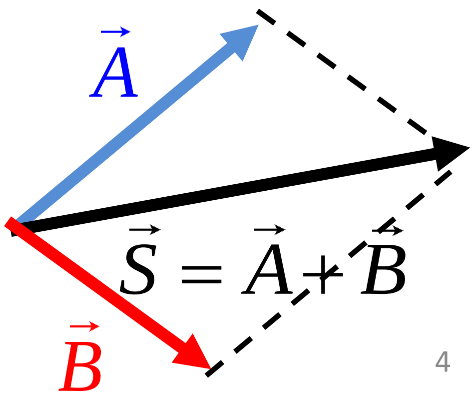
$$\vec{V} \begin{pmatrix} \overline{V}_x \\ \overline{V}_y \\ \overline{V}_z \end{pmatrix}$$

III- Somme de deux Vecteurs:

On veut faire la somme des deux vecteurs $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$

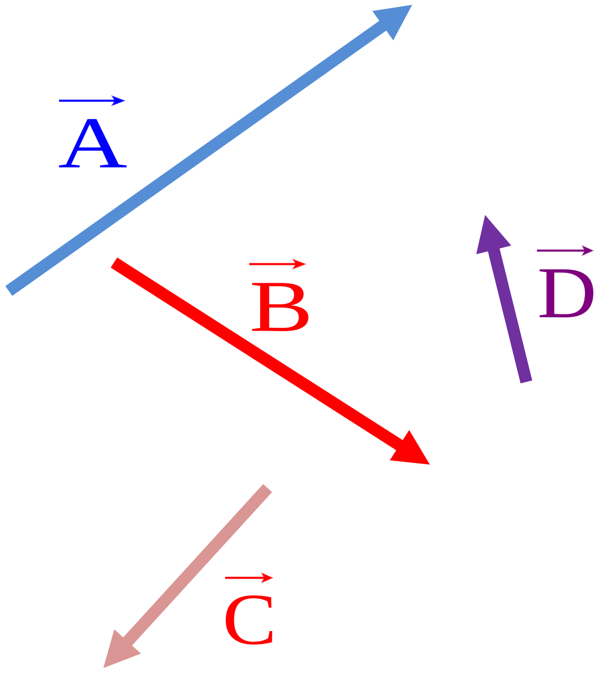


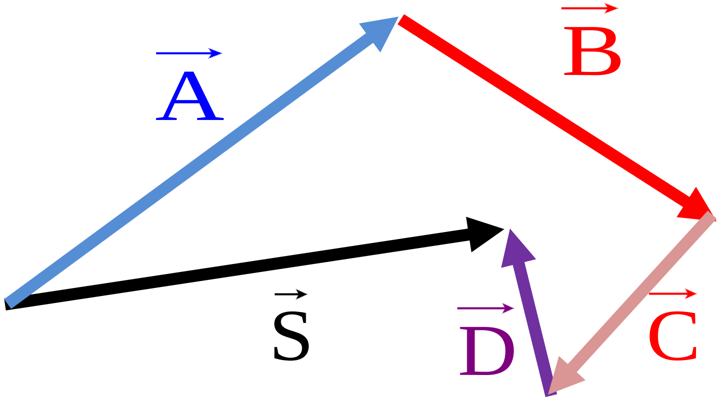




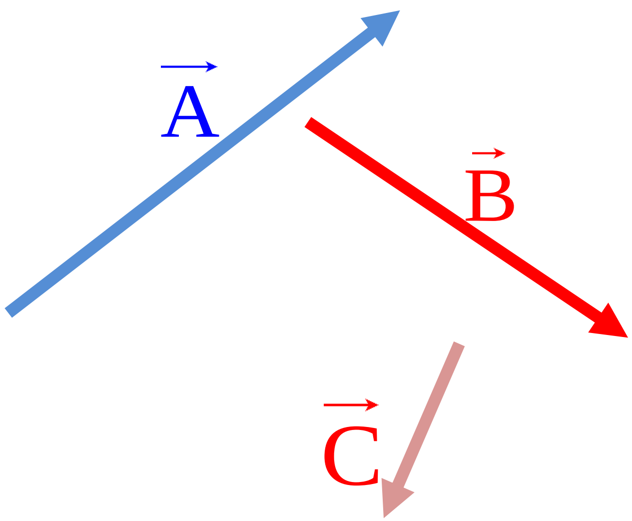
IV- Somme de plusieurs Vecteurs:

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$$

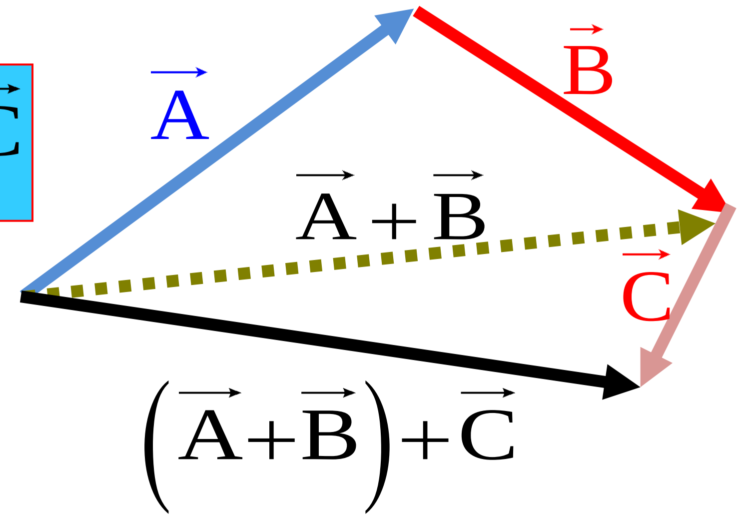




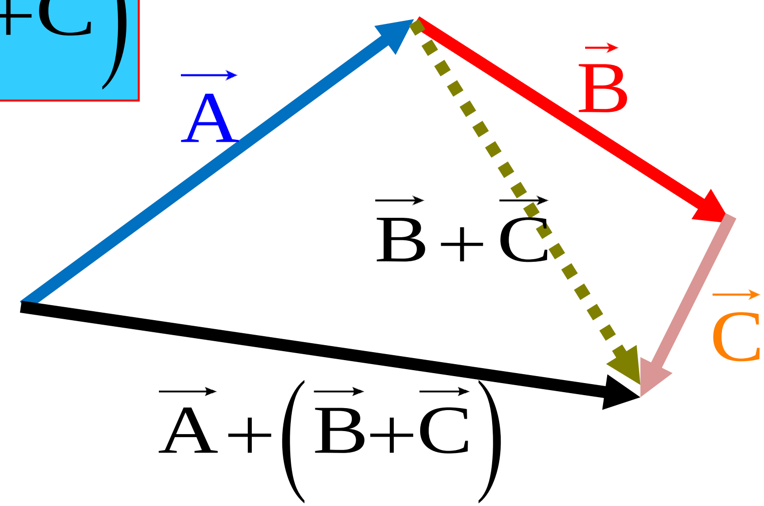
V- L'addition de vecteurs est associative:



$$\boxed{\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}}$$



$$\boxed{\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)}$$



$$\boxed{\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)}$$

VI- Multiplication de vecteurs par un scalaire :

La multiplication d’un vecteur $\vec{A}$ par un nombre est un vecteur, noté $p\vec{A}$, dont :

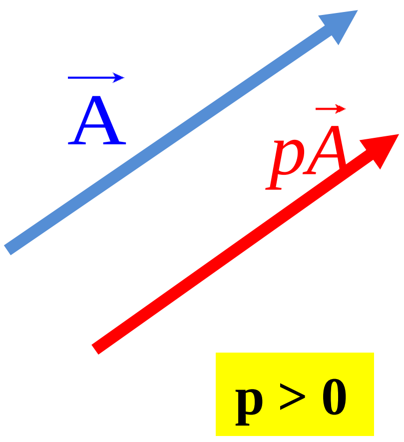
- la direction est celle de $\vec{A}$

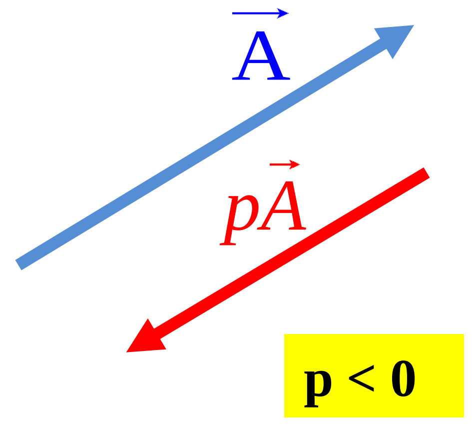
- le module est égal à pA

- le sens:

a) si p > 0, il a le même sens que $\vec{A}$

b) si p < 0, il a le sens contraire de $\vec{A}$

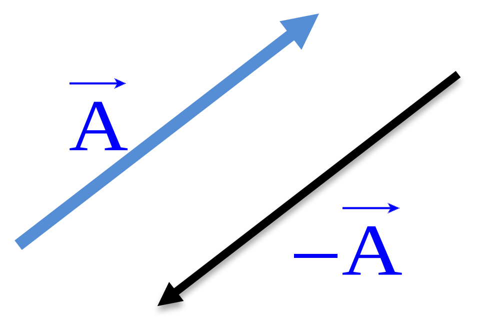




VII- Vecteurs opposés:

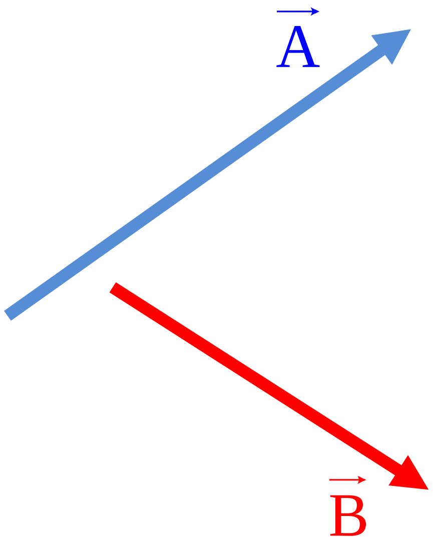
Si p=-1

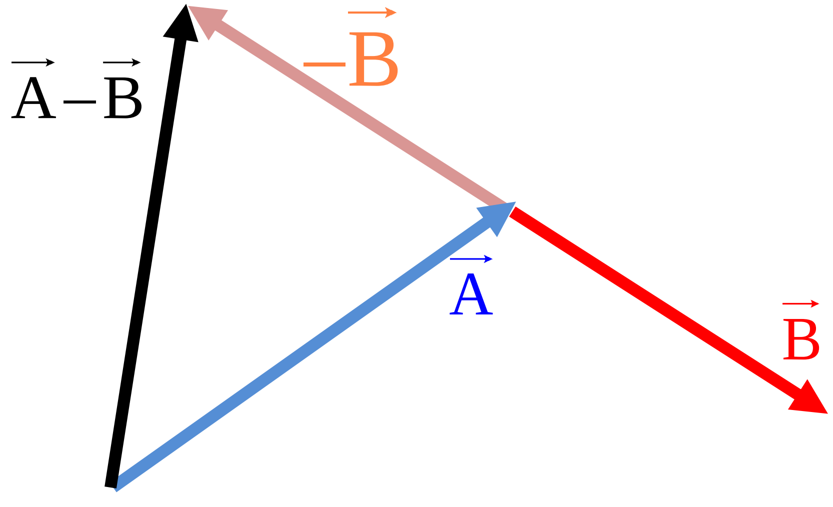
On a les vecteurs $\vec{A}$ et $-\vec{A}$

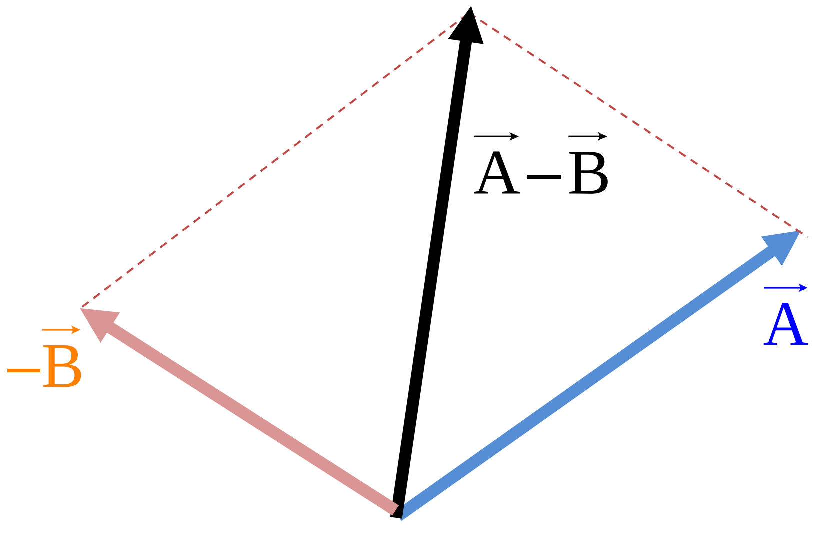


III- Soustraction de deux Vecteurs:

$$\vec{D} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + \left(-\overrightarrow{B}\right)$$







Exemples

Exercice 1:

Soient les vecteurs $\vec{V}_1 = 2(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{V}_2 = -4\vec{i}$, $\vec{V}_3 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$

Construire sur une feuille de papier millimétré les vecteurs : $\vec{V}_1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\vec{V}_2\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ $\vec{V}_3\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ $\vec{B} = \vec{V}_3 - \vec{V}_2$ $\vec{C} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 + 2\vec{V}_3$

On peut calculer analytiquement ou graphiquement

calcule analytiquement

$$\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = 2(\vec{i} + \vec{j}) - 4\vec{i} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{A}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{V}_3 - \vec{V}_2 = (4\vec{i} - 2\vec{j}) - (-4\vec{i}) = 8\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{V}_3 - \vec{V}_2 = \vec{B}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 + 2\vec{V}_3 = 2(\vec{i} + \vec{j}) - (-4\vec{i}) + 2(4\vec{i} - 2\vec{j}) = 14\vec{i} - 2\vec{j}$$

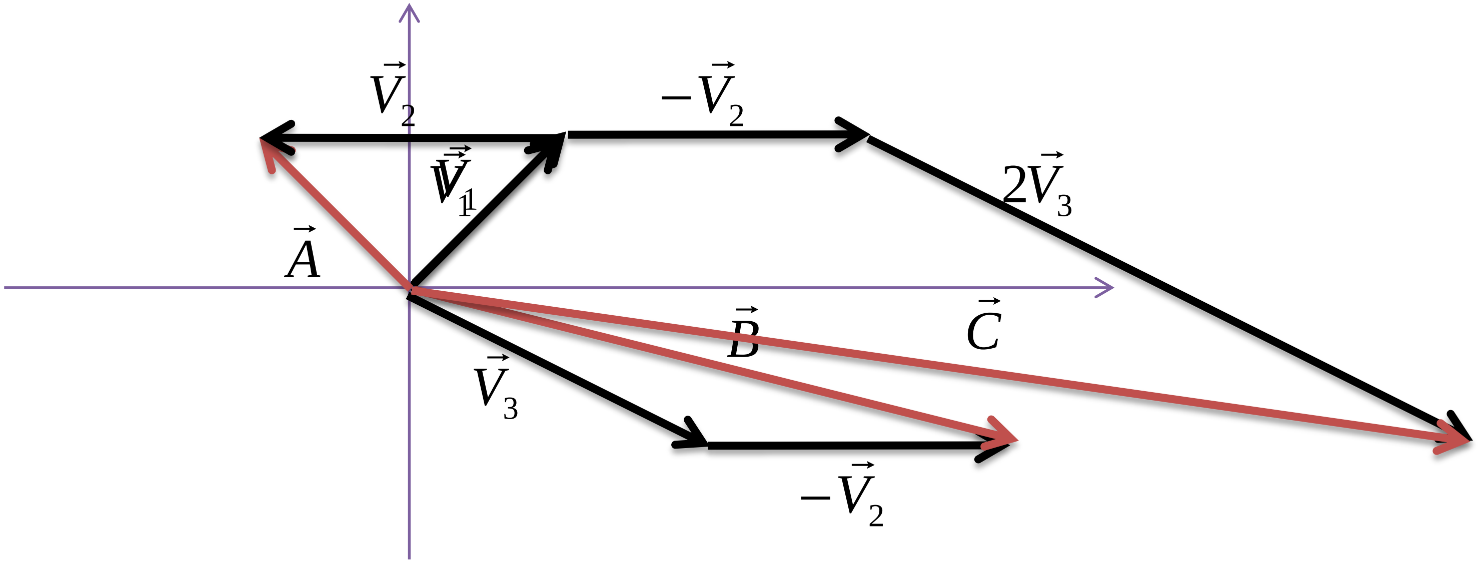
$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 + 2\vec{V}_3 = \vec{C}\begin{pmatrix}14\\-2\end{pmatrix}$$

calcule graphiquement

$$\vec{A} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$\vec{B} = \vec{V}_3 - \vec{V}_2$$

$$\vec{C} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 + 2\vec{V}_3$$



Exercice 2 :

Soient les vecteurs $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{V}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{V}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

Trouver les modules de $\vec{V}_3$, $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ et $2\vec{V}_1 - 3\vec{V}_2 - 5\vec{V}_3$

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\left\|\vec{V}_3\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3\right\| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$2\vec{V}_1 - 3\vec{V}_2 - 5\vec{V}_3 = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$2\vec{V}_1 - 3\vec{V}_2 - 5\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

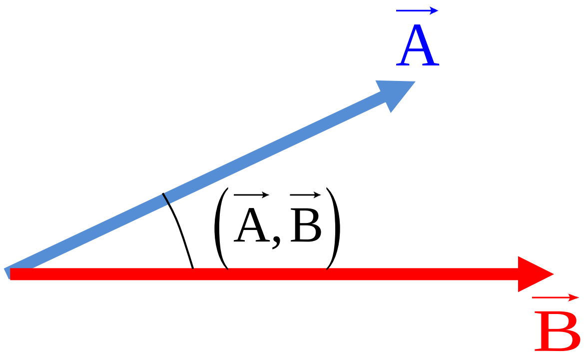
$$\left\|2\vec{V}_1 - 3\vec{V}_2 - 5\vec{V}_3\right\| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{30}$$

VIII- Produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire.

$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)$$



Expression en coordonnées cartésiennes

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Propriétés

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$$

$$p\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \left(p\vec{A}\right).\vec{B} = \vec{A}.\left(p\vec{B}\right) = p\vec{A}.\vec{B}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{0} \;\; si \quad \vec{A} \perp \vec{B} \quad et \quad \vec{A}.\vec{B} = AB \;\; si \quad \vec{A} // \vec{B}$$

IX- Produit vectoriel de deux vecteurs

Définition

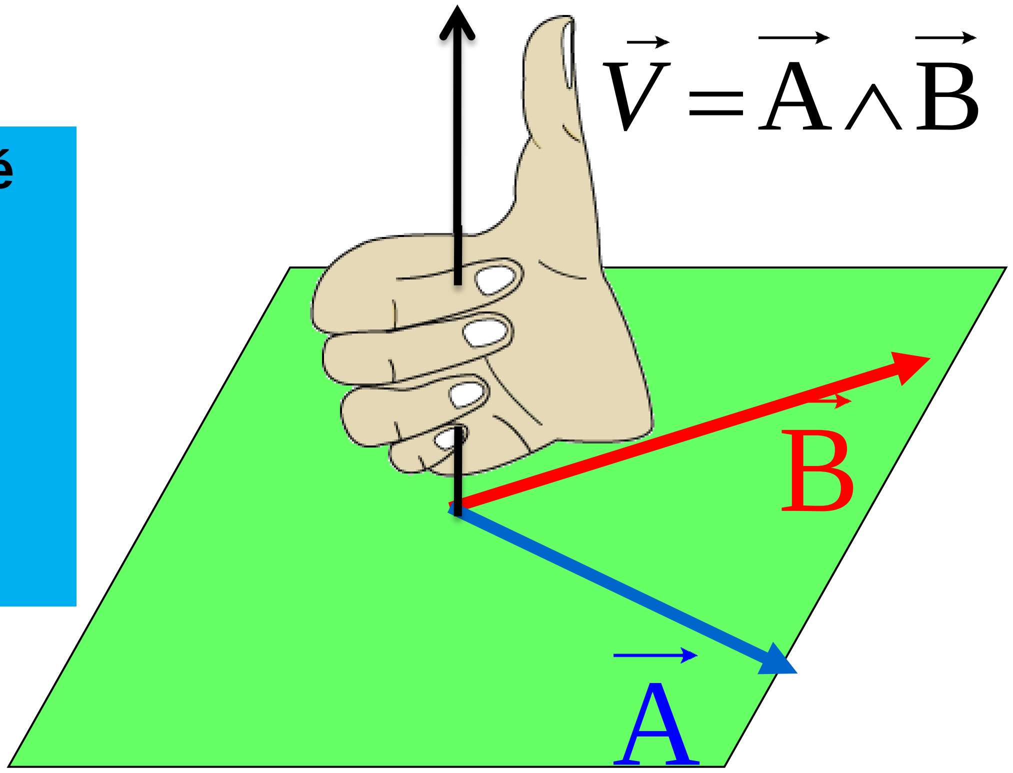
Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur

$$\boxed{\vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{B}}$$

-- perpendiculaire au plan formé par $\vec{A}$ **et** $\vec{B}$

-- de module $\left|\vec{V}\right| = \left|\vec{A}\right| . \left|\vec{B}\right| \sin\left(\vec{A}, \vec{B}\right)$

- orienté de telle sorte que le trièdre $\left(\vec{A}, \vec{B}, \vec{V}\right)$ **soit direct.**



Expression cartésienne

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} (-\vec{j}) + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\vec{i} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\vec{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\vec{k}$$

Propriétés

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{A} \wedge \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

$$p\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \left(p\vec{A}\right) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge \left(p\vec{B}\right)$$

- **Si** $\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|$ **alors** $\vec{A} \perp \vec{B}$
- **Si** $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ **alors** $\vec{A} = \vec{0}$ **OU** $\vec{B} = \vec{0}$ **OU** $\vec{A} // \vec{B}$

Exemples

Exercice 3 :

Soient les vecteurs $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{V}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{V}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

Trouver les angles $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right)$ et $\left(\vec{V}_2, \vec{V}_3\right)$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

$$\left\|\vec{V}_1\right\| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14} \qquad \left\|\vec{V}_2\right\| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = (3)(2) + (-2)(-4) + (1)(-3) = 11$$

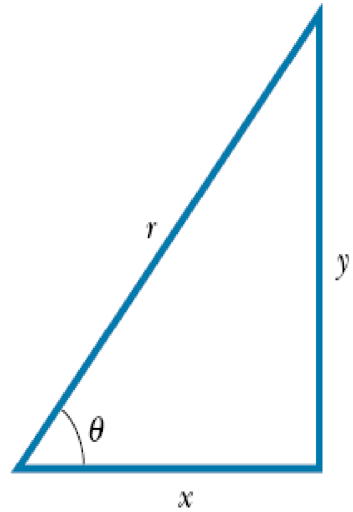
$$\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_2}{V_1 V_2} = \frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$$

Rappel de trigonométrie:

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \text{coa}\ \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \text{coa}\ \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2} \times \cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2} \times \sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \times \cos\frac{p-q}{2}$$

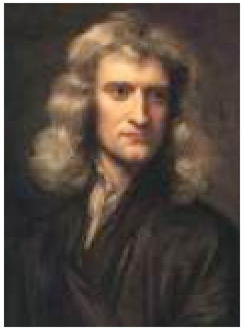
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2} \times \sin\frac{p-q}{2}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Angle	Sinus	Cosinus	Tangente
0	**0**	**1**	**0**
$\pi/6$ (30°)	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/3$ (60°)	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$ (45°)	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/2$ (90°)	**1**	**0**	**$+\infty$**
π (180°)	0	-1	0
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tan \alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$
$\pi+\alpha$	**$-\sin \alpha$**	**$-\cos \alpha$**	**$\tan \alpha$**
$\pi/2-\alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$1/\tan \alpha$

Le calcul infinitésimal



Isaac Newton
(1643–1727)

$x = t^n$	$\frac{dx}{dt} = nt^{n-1}$
$x = c$	$\frac{dx}{dt} = 0$
$x = cu$	$\frac{dx}{dt} = c\frac{du}{dt}$
$x = u + v$	$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$
$x = f(u)$	$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{du}\frac{du}{dt}$

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 –1716)

Différentielle d'une fonction:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz}$$

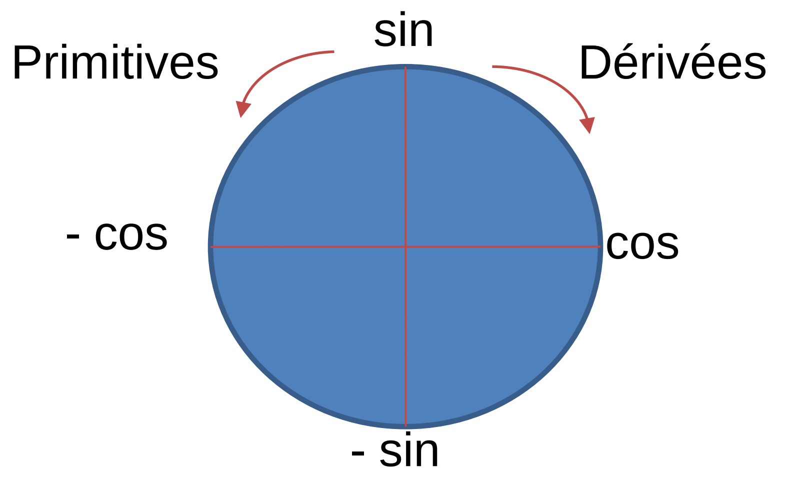
$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$: sont les dérivées partielles de f(x, y, z)

gradian d'une fonction: $$\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

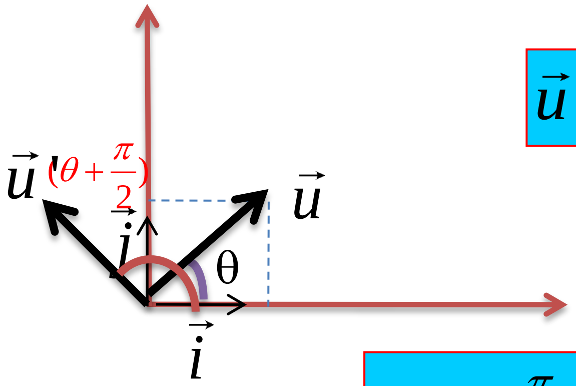
Dérivées de trigonométrie

(sinθ)'=cosθ

(cosθ)'=-sinθ

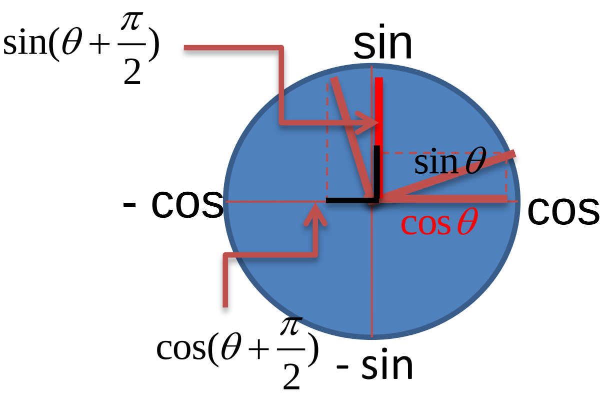


Dérivée d'un vecteur unitaire:



$$\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{u}\,' = \cos(\theta+\frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\theta+\frac{\pi}{2})\vec{j}$$



$$\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta \qquad \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta$$

$$\vec{u}\,' = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{j} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

Donc: $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}\,'$

Et : $\dfrac{d\vec{u}\,'}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}$

Le système international d'unités (SI)

adopté par la 11e Conférence générale des poids et mesures (1960)

Tableau 5. Préfixes SI

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^{1}	déca	da	10^{-1}	déci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{6}	méga	M	10^{-6}	micro	µ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	péta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

La mécanique classique et ses héros

Galileo Galilei *dit* Galilée
(1594–1642)

Isaac Newton
(1643–1727)

Pierre Varignon
(1654–1722)

Leonhard Euler
(1707–1783)