(PHYS1)

INTRODUCTION à LA MECANIQUE

(PHYS2)

ELECTRICITE ET ONDES

facultephysique.webnode.fr

Cinématique du point par A.DIB

Cinématique du point

Définition:

La cinématique est une branche de la mécanique qui étudie les mouvements des corps dans l'espace en fonction du temps indépendamment des causes qui les provoquent.

NOTION DE REPÈRE

Point matériel

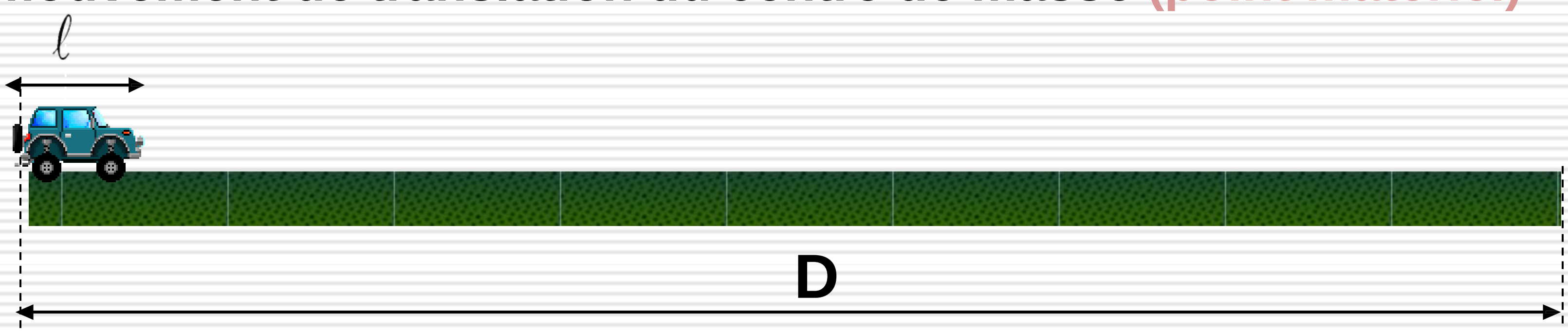
Les mouvements des objets sont en général très compliqués si on les observe de prés.

Une boule roule sur un plan incliné, on voit cette boule descendre verticalement et tournée sur elle même.

Aborder la mécanique sur des exemples aussi complexes est évidemment hors question. Donc nous préférons décomposé l'étude des mouvements des objets en deux:

-mouvement de rotation

-mouvement de translation du centre de masse (point matériel)



soit une voiture de longueur ℓ
qui se déplace sur une route rectiligne.

La distance parcourue D étant très grande devant ℓ, on peut assimiler la voiture à un point matériel.

NOTION DE REPÈRE

Soit un observateur (O_1) assi dans un train.

Soit observateur(O_2) debout sur le quai.

Soit un arbre (A) sur le quai.

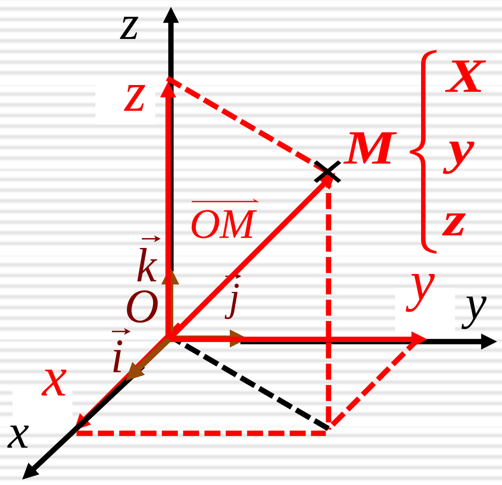
(A) est en mouvement par rapport à (O_1), cela signifie que sa position par à (O_1) change en fonction du temps.

Si la position de (A) ne change pas par rapport à celle de (O_2), A est au repos par rapport à (O_2). Donc pour décrire un mouvement il faut choisir un repère déréférence .

Pour repérer la position d'un point matériel dans l'espace, on se fixe un repère dans l'espace, c'est-à-dire:

-un point O origine des coordonnées
-trois axes (ox,oy,oz) orientés et munis d'une unité de mesure (par exemple le mètre).

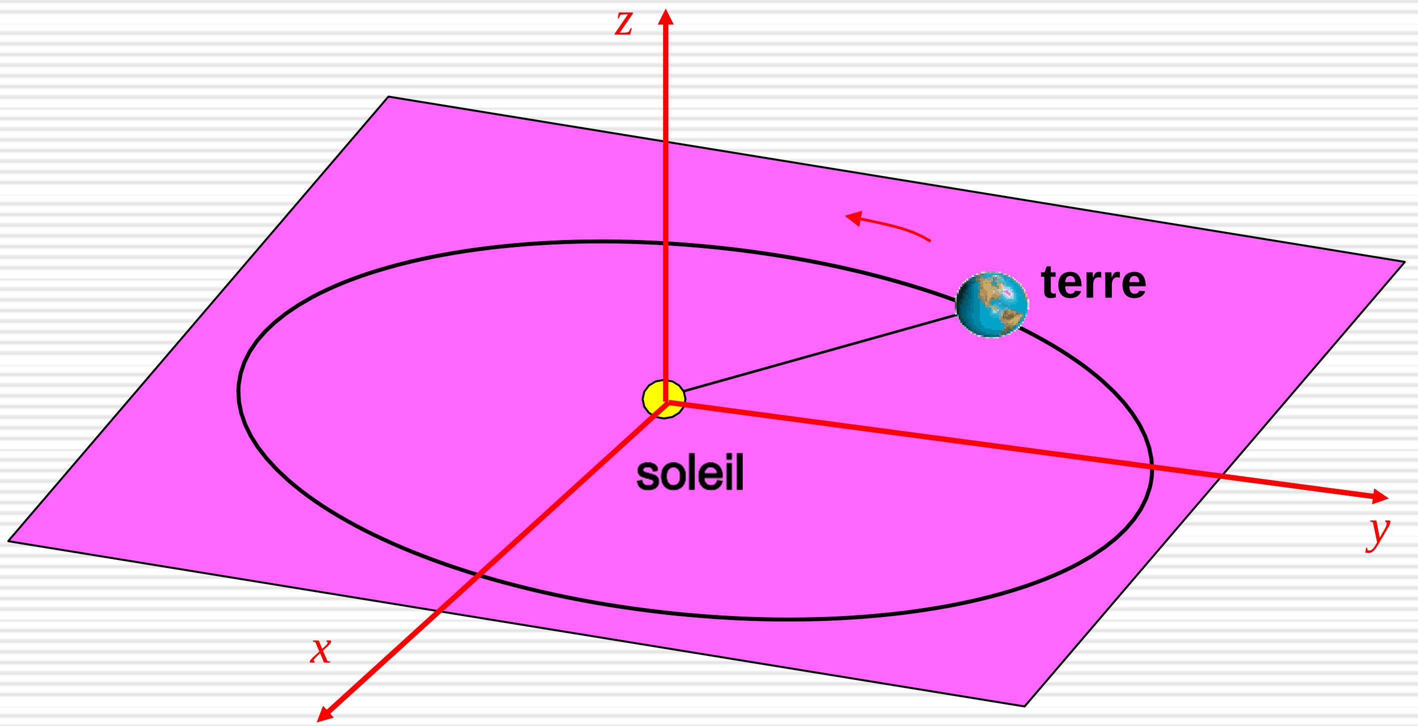
Pour des raisons de commodité, on choisit un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ direct lié au sol.



Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées x, y et z tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

NOTION DE REPÈRE



Etude du mouvement orbital de la terre autour du soleil.
Le rayon de la terre R=6400 Km est très inférieur à la distance moyenne terre-soleil: d=150 000 000 Km.
On peut considérer la terre comme un point matériel dont la masse est concentrée en son centre

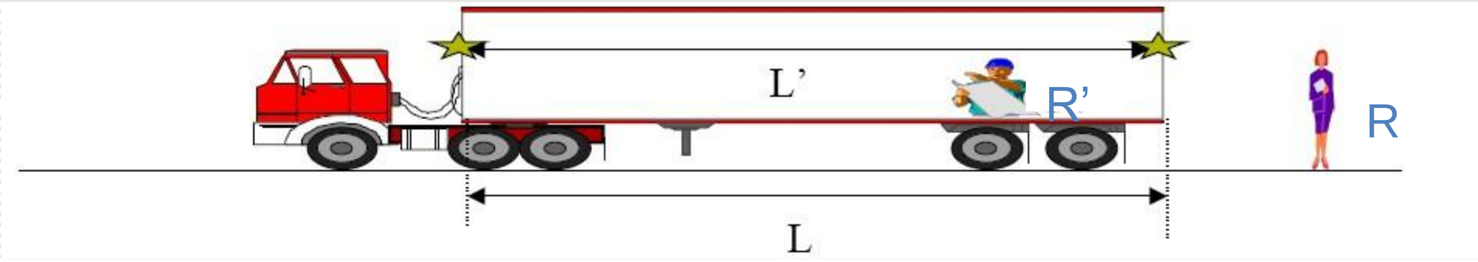
NOTION DE MOUVEMENT

Un objet est mouvement par rapport à un autre si sa position change au cours du temps(A/O_1)

Un point M est dit fixe par rapport au repère R $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ si ses coordonnées ne changent pas.(A/O_2)

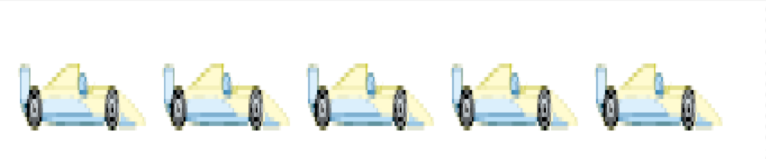
Le point M est en mouvement si au moins une de ses coordonnées change dans le temps.

La notion de mouvement est relative.
En effet un point peut être en mouvement par rapport à un repère *R* et au repos par rapport à un second repère *R ’*



NOTION DE MOUVEMENT

On distingue essentiellement trois type de mouvements :



Translation

Rotation

Vibration

Ou une combinaison de deux de ces mouvements

NOTION DE TRAJECTOIRE

Définition :

C'est le lieu géométrique des positions successives occupées par le point matériel au cours du temps .

Exemple:

Un mobile est repéré par les coordonnées suivantes :

$$X(t) = A\cos(wt)$$
$$Y(t) = A\sin(wt)$$

En supprimant le temps, on obtient : $X^2 + Y^2 = A^2$

la trajectoire est donc un cercle de centre o et de rayon A

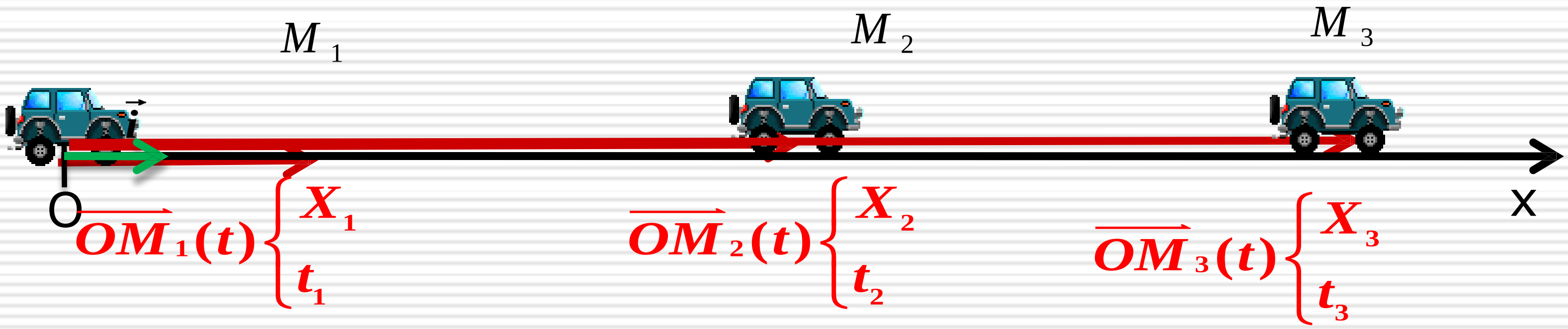
L' équation de la trajectoire est une relation qui lie les coordonnées du point entre elles

MOUVEMENT RECTILIGNE

La trajectoire d'un mouvement rectiligne est une droite.

Vecteur position

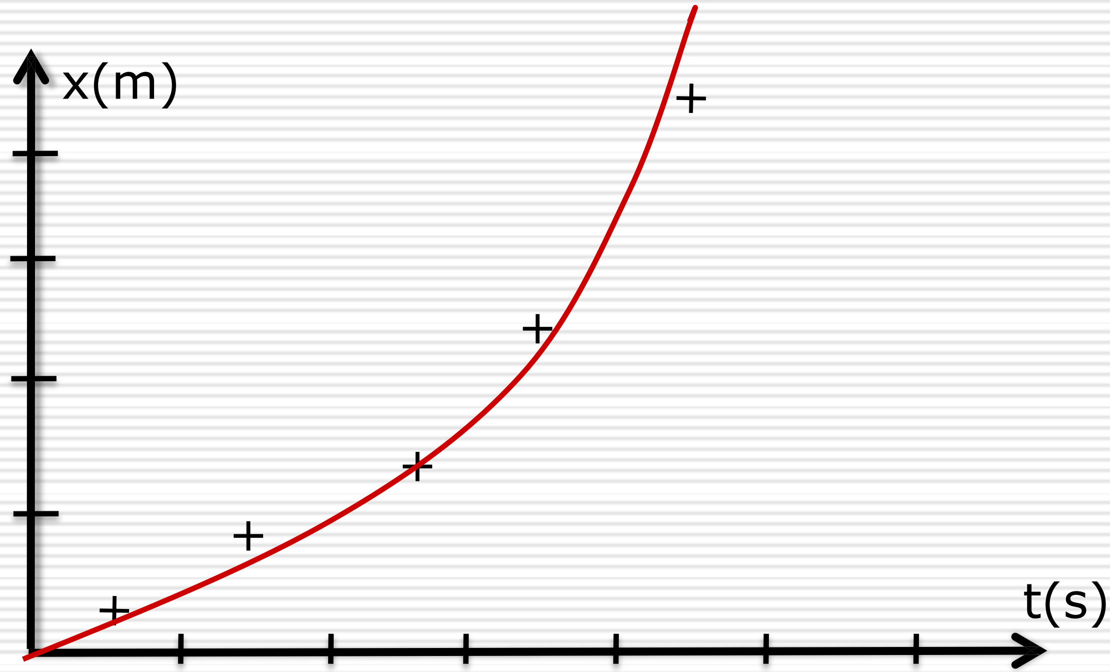
C'est le vecteur $\overrightarrow{OM}(t) = X(t)\vec{i}$ qui désigne la distance qui sépare le mobile M du point O pris comme origine.



x(t) est appelée équation horaire du mouvement

Notion de diagramme des espaces

Si on reporte les positions successives du mobile en fonction du temps, on obtient une courbe appelée : Diagramme des espaces

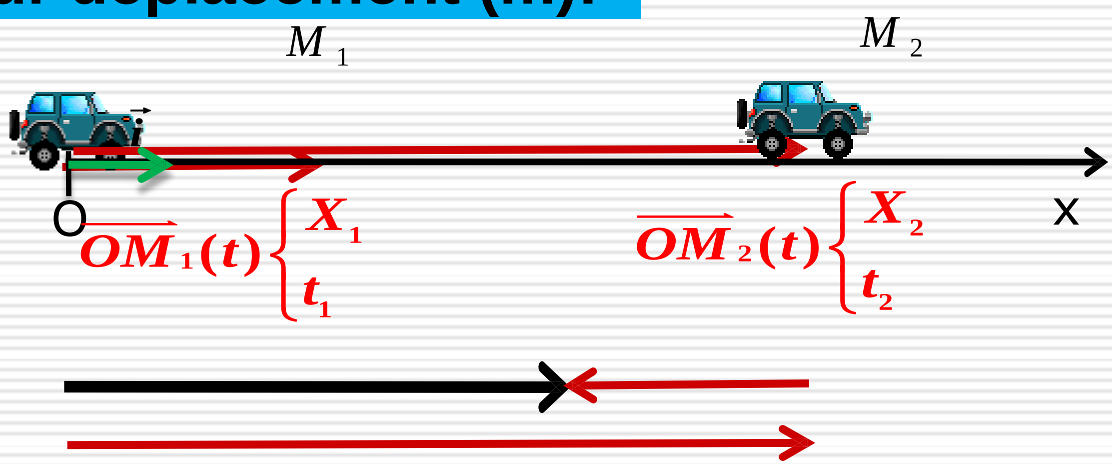


Les enseignements fournis par cette courbe sont beaucoup plus riches que ceux du tableau: nous pouvons avoir des renseignements sur d'autre positions. (interpolation)

Remarque: il ne faut pas confondre trajectoire et diagramme des espaces.

Le mobile se déplace en aller, retour, s’arrete , change de sens et direction .
Tous ces mouvements seront illustrés dans un vecteur déplacement.

Vecteur déplacement (m):



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} = \Delta x\vec{i} = \Delta\overrightarrow{OM}$$

Le vecteur déplacement est la distance parcourue entre deux instants:

Vecteur vitesse (m/s):

Nous pouvant maintenant préciser le mouvement en ajoutant une notion qui nous renseigne sur l’état du mouvement: c’est la vitesse.

Il existe deux notions de la vitesse:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}(vitesse\ moyenne)\ et$$

$$v_i = \frac{dx}{dt}(vitesse\ ins\tan\tan ée)$$

Vecteur vitesse moyenne (m/s):

Si $\Delta t = t_2 - t_1$ est le temps mis entre M_1 et M_2 la vitesse moyenne est :

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{v}_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\vec{i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$$

Si pour aller d'ALGER vers BLIDA, distance de 40km, nous avons mis une heure, nous dirons spontanément que nous avons fait une moyenne de 40km/h.

Vecteur vitesse instantanée:

On peut assimile la vitesse moyenne à la vitesse instantanée au milieu de l'intervalle des temps si et seulement si cette intervalle est très petit.

Si on diminue l'intervalle de temps, on obtient la vitesse instantanée :

$$\vec{v}_m = \vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} \quad ou$$

$$\vec{v}_m = \vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \vec{i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} = \frac{dx}{dt} \vec{i}$$

Le terme $v = \frac{dx}{dt}$ possède deux significations :

Soint x(t) l'équation horaire du mobile,

1- $v = \frac{dx}{dt}$ désigne sa vitesse .

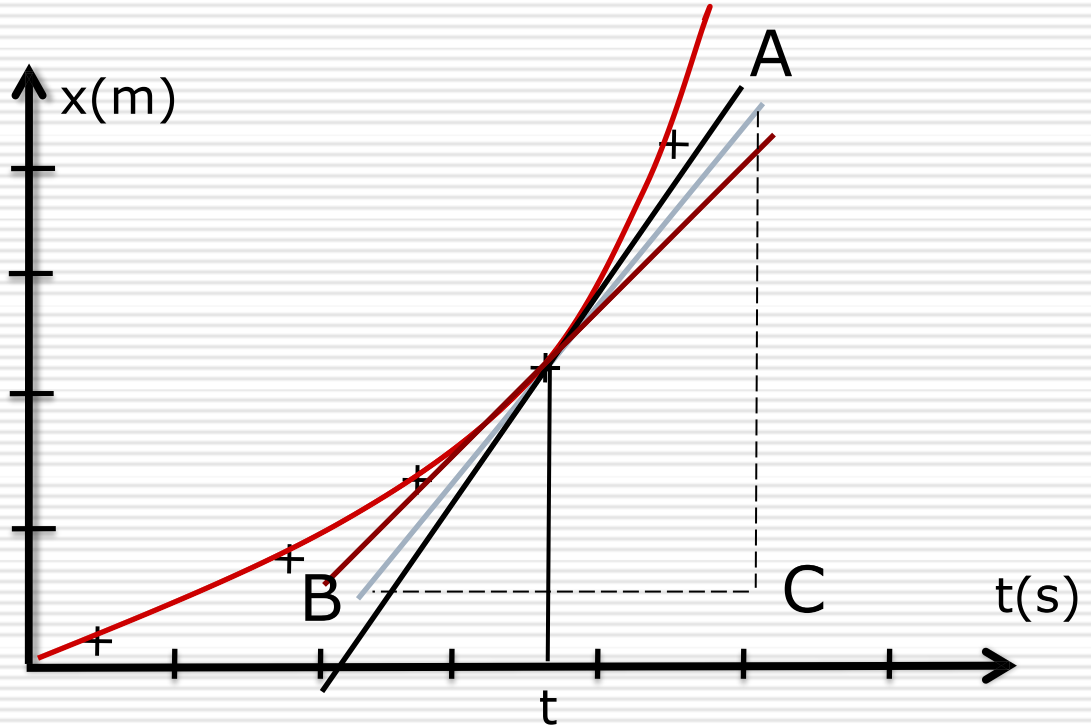
Exemple:

$$x(t) = 3x^3 + 2x^2 + 5$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 9x^2 + 4x$$

2- $\frac{dx}{dt}$ désigne la pente de la tangente du graphe de x(t).

Exemple:

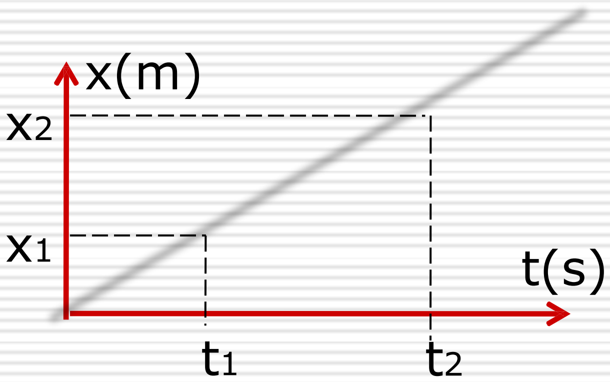


$$v = \frac{dx}{dt} = \tan \alpha = \frac{AC}{BC}$$

Problème !!!

On va donc calculer la vitesse instantanée à partir de la vitesse moyenne. Il y a deux cas ou la vitesse moyenne est confondue avec la vitesse instantanée :

1-cas d'un Mouvement rectiligne uniforme :



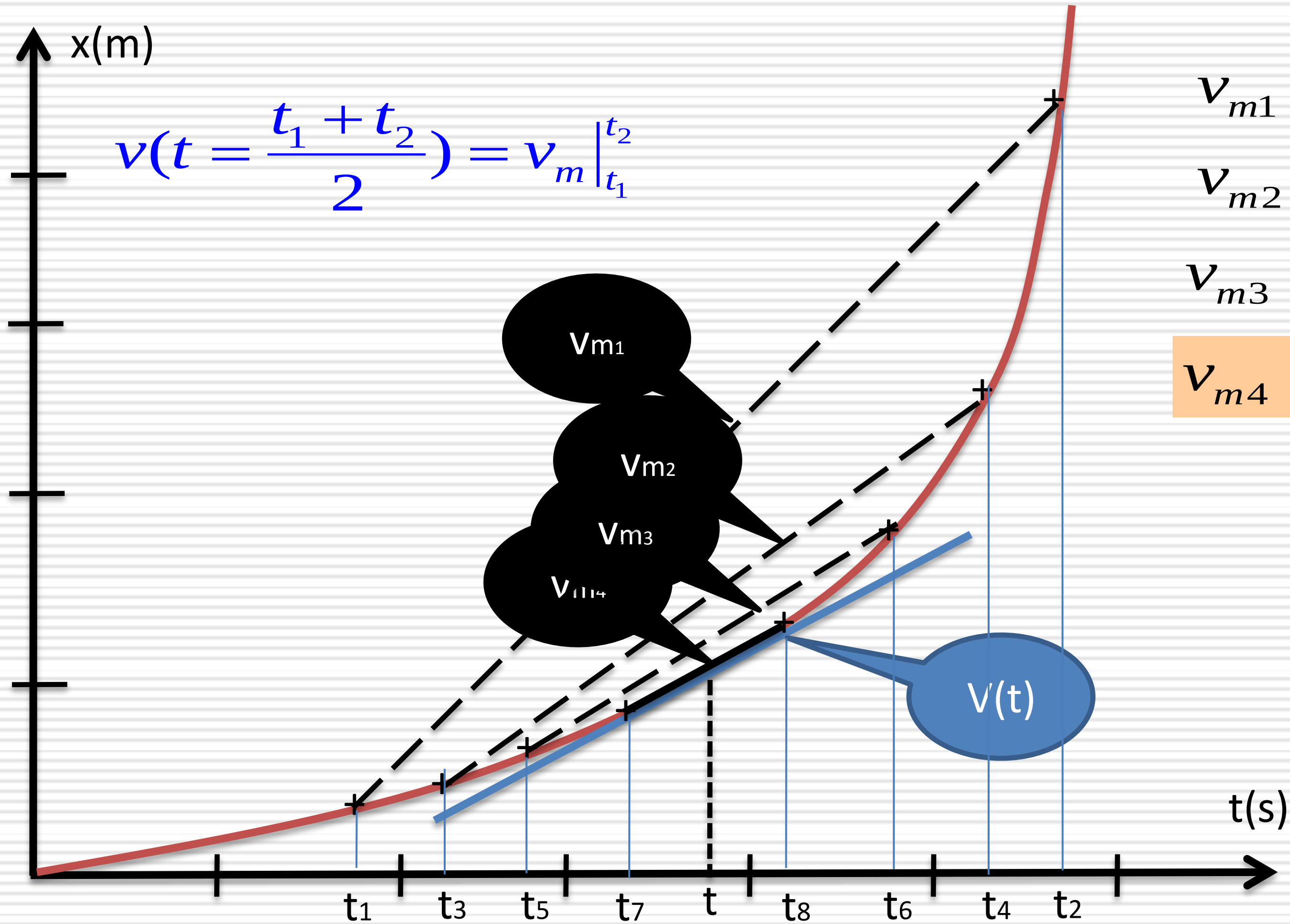
$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$v_i = \frac{dx}{dt} = \tan\alpha = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_m = v_i}$$

2ème cas: mouvement rectiligne quelconque:

$$v\left(t = \frac{t_1 + t_2}{2}\right) = v_m\Big|_{t_1}^{t_2}$$



$$v_{m1} \neq v$$

$$v_{m2} \neq v$$

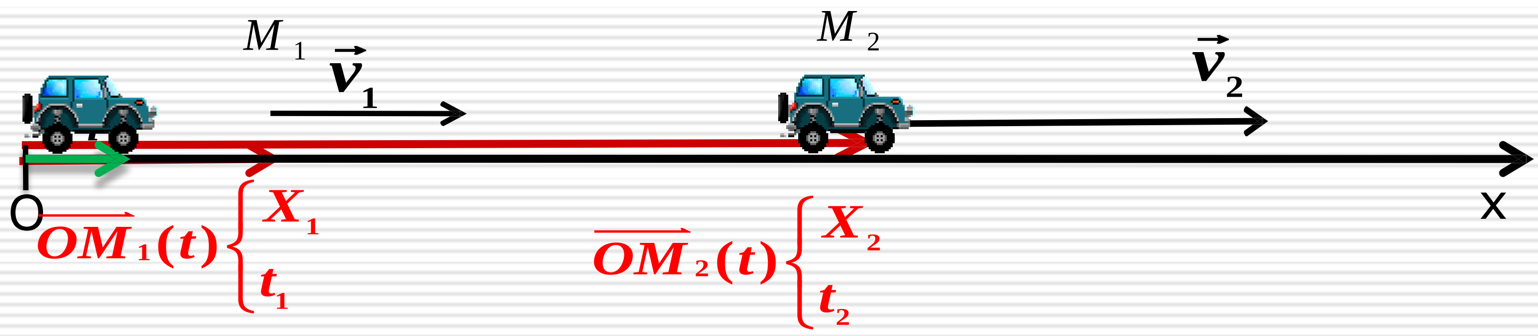
$$v_{m3} \cong v$$

$$\boxed{v_{m4} = v}$$

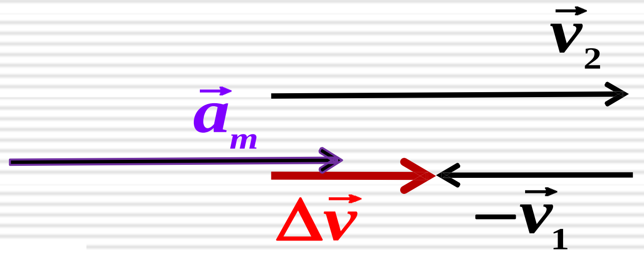
Conclusion :
La vitesse instantanée à l'instant t est assimilée à la vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 tel que t est milieu de t_1 et t_2 avec: $\Delta t \lll$.

Vecteur accélération (m/s²):

Vecteur accélération moyenne :



$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

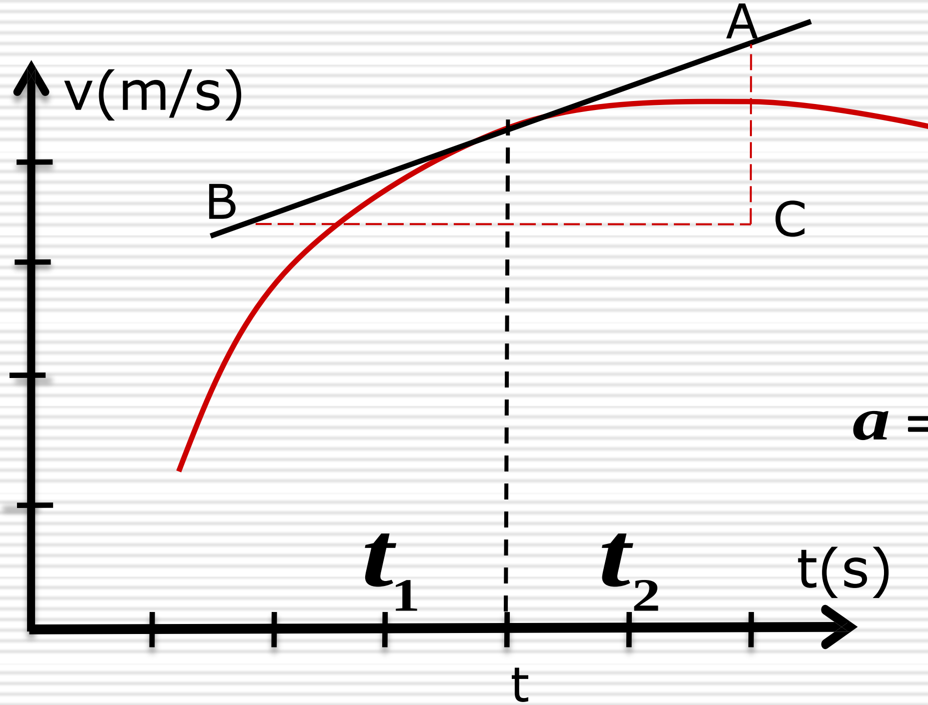


$\vec{a}_m$ *et* $\Delta\vec{v}$ ont même sens et direction .

Vecteur accélération instantanée:

$$\vec{a}_m = \vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

2- $\frac{dv}{dt}$ désigne la pente de la tangente du graphe de v(t).



$$a = \frac{dv}{dt} = \tan\alpha = \frac{AC}{BC}$$

Conclusion :

L'accélération moyenne entre t_1 et t_2 est assimilée à l'accélération instantanée au milieu de l'intervalle (t_1 , t_2) avec Δt <<<

Exemple :

Equation horaire du mouvement :

$$x(t) = 3t^3 + 2t^2 + 5$$

Equation de la vitesse du mouvement :

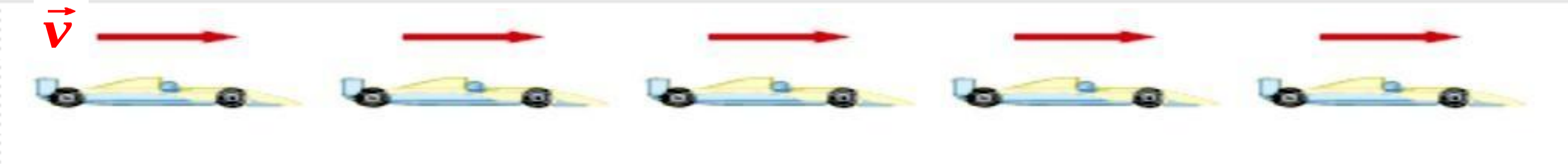
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 9t^2 + 4t$$

Equation de l'accélération du mouvement :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 18t + 4$$

Mouvement rectiligne uniforme :

$$\vec{v} = constante \quad et \quad \vec{a} = 0$$



Mouvement rectiligne uniformément accéléré :

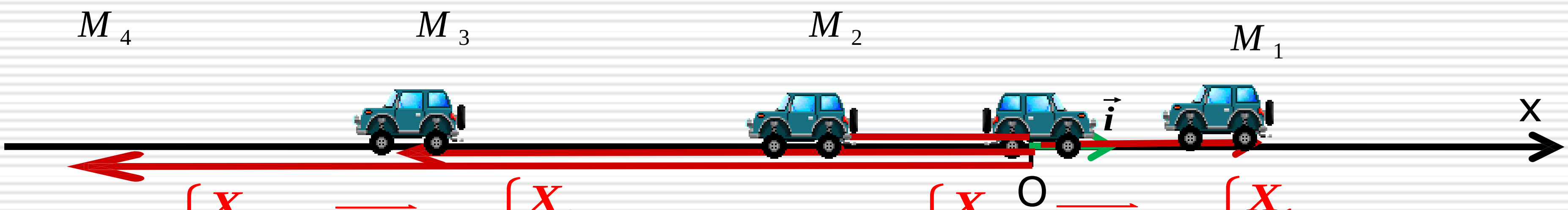
$$\vec{a} = constante \quad et \quad \vec{a}\vec{v} > 0 \quad ou \quad |\vec{v}| \nearrow$$

Mouvement rectiligne uniformément retardé ou décéléré :

$$\vec{a} = constante \quad et \quad \vec{a}\vec{v} < 0 \quad ou \quad |\vec{v}| \searrow$$

Exemple :

Soit une voiture se déplaçant sur une route rectiligne repérée par les positions :M_1,M_2,M_3 et M_4 aux instants t_1=0s,t_2=2s,t_3=4s,t_4=5s. Respectivement:



$\overrightarrow{OM_4}(t)\begin{cases}X_4\\t_4\end{cases}$ $\overrightarrow{OM_3}(t)\begin{cases}X_3\\t_3\end{cases}$ $\overrightarrow{OM_2}(t)\begin{cases}X_2\\t_2\end{cases}$ $\overrightarrow{OM_1}(t)\begin{cases}X_1\\t_1\end{cases}$

$\overrightarrow{OM_1} = 2\vec{i}$ $\overrightarrow{OM_2} = -2\vec{i}$ $\overrightarrow{OM_3} = -10\vec{i}$ $\overrightarrow{OM_4} = -12\vec{i}$

1- Calculer les vecteurs déplacements : $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\overrightarrow{M_2M_3}$ $\overrightarrow{M_3M_4}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\vec{i} = \left((-2-2)\right)\vec{i} = -4\vec{i}$$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2} = (\bar{x}_3 - \bar{x}_2)\vec{i} = \left(-10-(-2)\right)\vec{i} = -8\vec{i}$$

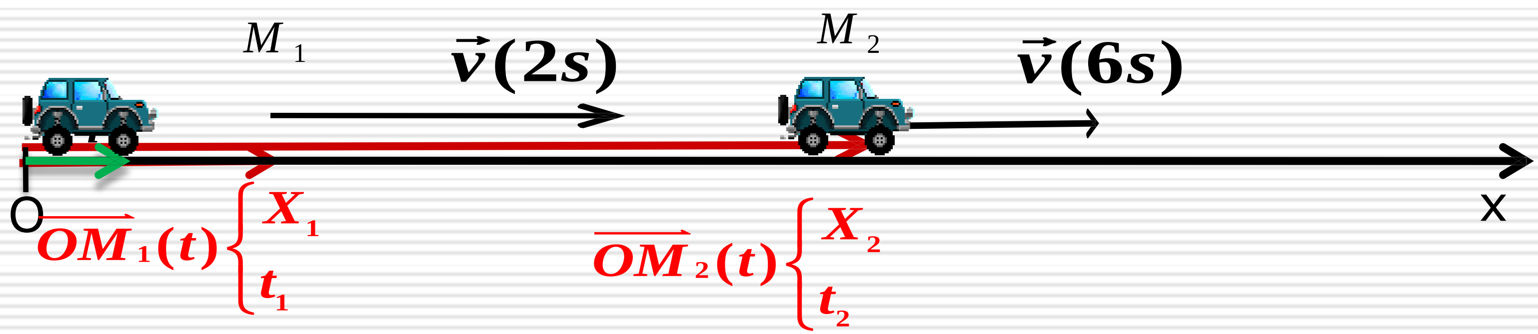
$$\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OM_3} = (\bar{x}_4 - \bar{x}_3)\vec{i} = \left(-12-(-10)\right)\vec{i} = -2\vec{i}$$

2-Déterminer les vecteurs vitesses moyennes entre M_1 et M_2 et entre M_3 et M_4 .

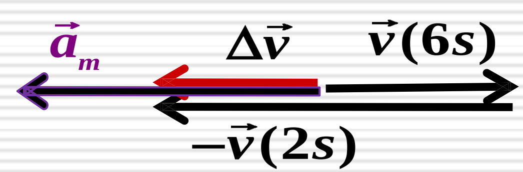
$$\vec{v}_{m1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{t_2 - t_1}\vec{i} = -2\vec{i}\ m/s$$

$$\vec{v}_{m2} = \frac{\overrightarrow{M_3M_4}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OM_3}}{t_4 - t_3} = \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_3}{t_4 - t_3}\vec{i} = -2\vec{i}\ m/s$$

3- Déterminer le vecteur accélération moyenne entre 2 et 6 s, v(2s) = 4m/s et v(6s) = 2 m/s



$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(6s) - \vec{v}(2s) = \vec{v}(6s) + (-\vec{v}(2s))$$



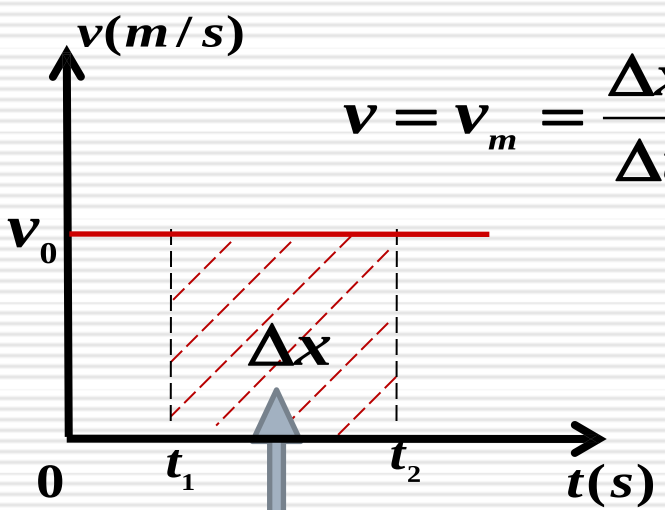
$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\left(\vec{v}(6s) - \vec{v}(2s)\right)}{(t_2 - t_1)} = \frac{(2-4)}{(6-2)}\vec{i} = -0,5\vec{i}\ m/s^2$$

Calcul Intégral:

Nous allons maintenant étudier le problème inverse pour passer de l'accélération à la vitesse puis à la position(calcul d'aire)

Jusqu'à présent on a vu comment passer de la position x(t) à la vitesse v(t) puis à l'accélération a(t)

Passage de la vitesse à la position:



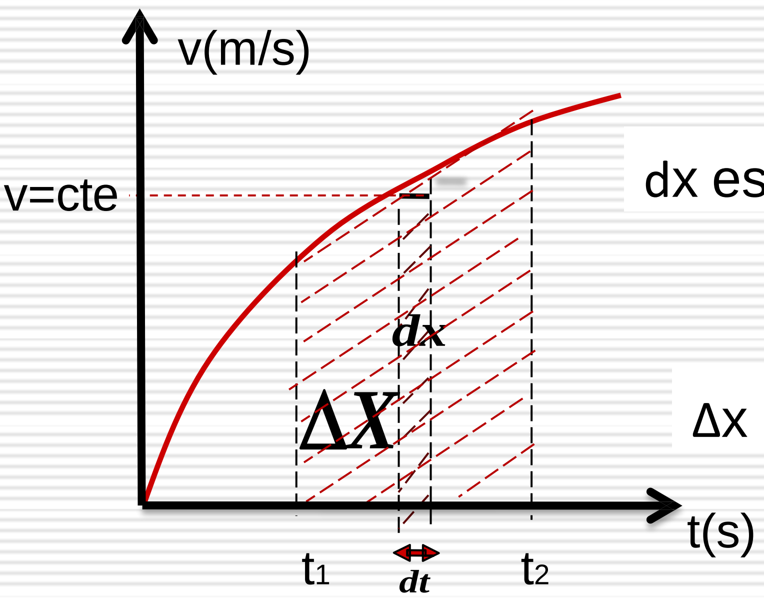
$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = v_0(t_2 - t_1)$$

Et donc: $x_2 = v_0(t_2 - t_1) + x_1$

$$\Delta x = v_0(t_2 - t_1) = l'aire\ sous\ la\ courbe\ v(t).$$

$2^{ème}$ Cas général :

On partage l'intervalle entre t_1 et t_2 en plusieurs petits dt .



$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$$

dx est donc l'aire sous la courbe v(t) sur l'intervalle dt

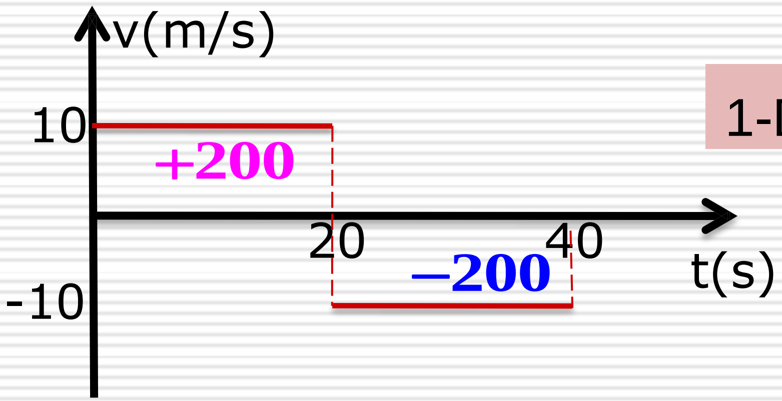
Δx est donc la somme des petits dx entre t_1 et t_2

$$\textit{Analitiquement } \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} vdt \Rightarrow x_2 = \int_{t_1}^{t_2} vdt + x_1$$

Remarque : Il ne faut pas confondre entre position et distance parcourue
-La position est l'aire sous v(t) en valeur algébrique
-La distance parcourue est l'aire sous v(t) en valeur absolue

Exemple:

On donne le graphe de la vitesse d'un mobile :à t=0 s , x=0 m .



1-Déterminer la position du mobile à t=40 s .

$$\Delta \overline{x}_0^{40} = air = 200 - 200 = \overline{x}(40) - \overline{x}(0) = 0$$

$$\boxed{\overline{x}(40) = 0}$$

$$\Delta \overline{x}_0^{40} = \int_0^{40} v\,dt = \int_0^{20} v\,dt + \int_{20}^{40} v'\,dt = v t_0^{20} + v' t_{20}^{40} = 10(20-0) - 10(40-20) = 0$$

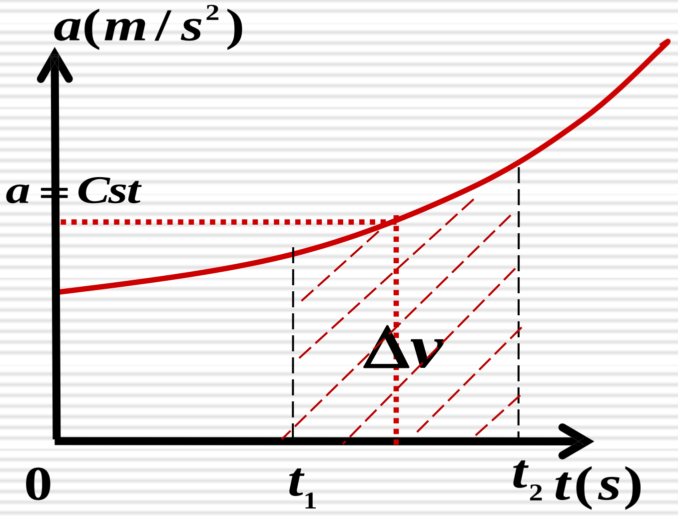
2-calculer la distance parcourue entre 0 et 40 s .

$$D = \left|\Delta \overline{x}_1\right| + \left|\Delta \overline{x}_2\right| = 200 + 200 = 400\ m$$

Passage de l'accélération à la vitesse:

On partage en plusieurs intervalles dt .

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt = l'aire\ sous\ la\ courbe\ a(t).sur\ (dt)$$



$$Analitiquement\ \Delta v = \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} adt$$

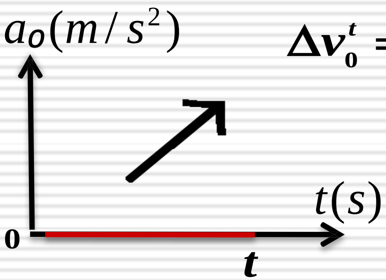
Δv est donc l'aire sous la courbe a(t) entre t_1 et t_2.

Remarque : Il ne faut pas confondre entre vitesse instantanée et l'aire sous la courbe de a(t), ($V_f - V_i$).

Étude de quelques mouvements particuliers

Mouvement rectiligne uniforme:

$$\grave{a}\, t = 0: \left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{array} \right\}$$

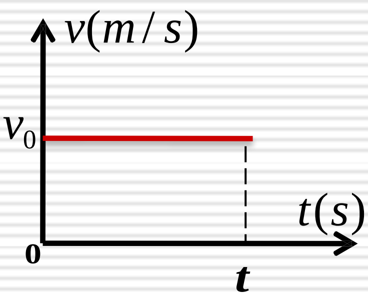


$$\Delta v_0^t = aire\ sous\, a(t) = 0$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0$$

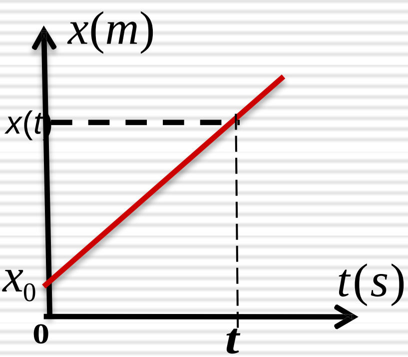
$$v(t) - v(0) = 0$$

$$v(t) = v_0 = cons\tan te$$



$$\Delta x_0^t = aire\ sous\, v(t) = v_0 t$$

$$x(t) - x_0 = v_0 t$$



$$x(t) = v_0 t + x_0$$

$$C'est\, une\, droite.$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^t dv = \int_0^t a dt$$

$$a = 0 \Rightarrow v(t) - v(0) = 0$$

$$v(t) = v_0$$

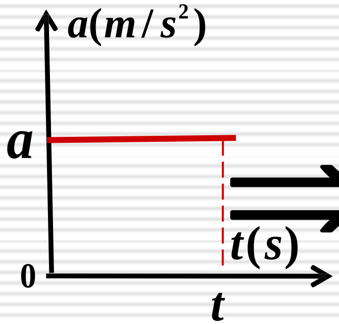
$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_0^t dx = v_0 \int_0^t dt$$

$$x(t) - x(0) = v_0 t$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

Mouvement rectiligne uniformément varié:

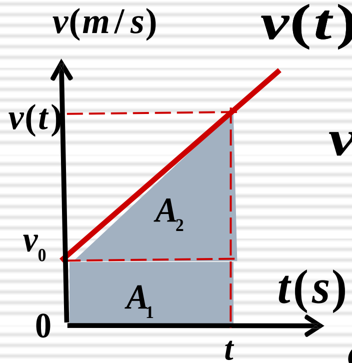


$$\grave{a}\, t = 0: \begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \textit{aire sous}\, a(t) = \Delta v_0^t = at$$

$$\Downarrow$$

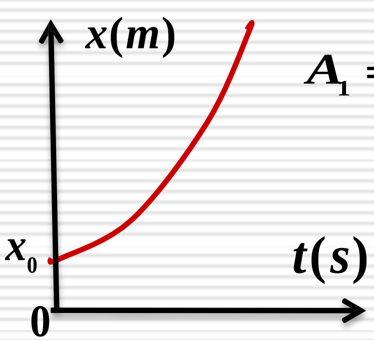
$$v(t) - v(0) = at \Rightarrow v(t) = at + v_0$$



$v(t)$ Est un droite de pente a

et d'abscisse à l'origine v_0.

$$\textit{aire sous}\, v(t) = \Delta x_0^t = A_1 \quad + A_2$$



$$A_1 = v_0 t \;, A_2 = \frac{1}{2}(v(t) - v_0)t = \frac{1}{2}att$$

$$\Delta x_0^t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \; \textit{est une parabole}.$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^t dv = \int_0^t adt$$

$$\swarrow$$

$$\Delta v_0^t = v(t) - v(0) = at$$

$$\swarrow$$

$$v(t) = at + v_0 \; (\textit{droite})$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$$

$$\swarrow$$

$$\int_0^t dx = \int_0^t vdt$$

$$\Delta x_0^t = x(t) - x(0) = \int_0^t (at + v_0)dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \; \textit{est une parabole}$$

Relation entre a, v et x:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

On multiplie chaque membre par v

$$va = v\frac{dv}{dt} \Rightarrow vdv = avdt = adx$$

On intègre de chaque côté

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx = a\int_{x_0}^{x} dx$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

$$(v^2 - v_0^2) = 2a(x - x_0)$$

$$\boxed{(v_f^2 - v_i^2) = 2a(\Delta x)_i^f}$$

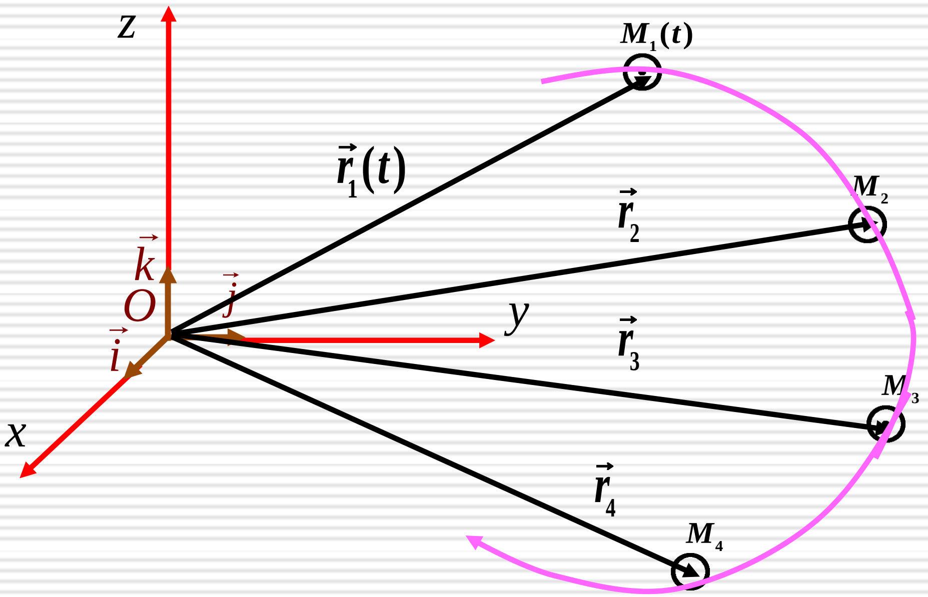
Mouvement dans l'espace ou curviligne :

Vecteur position :

La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile.

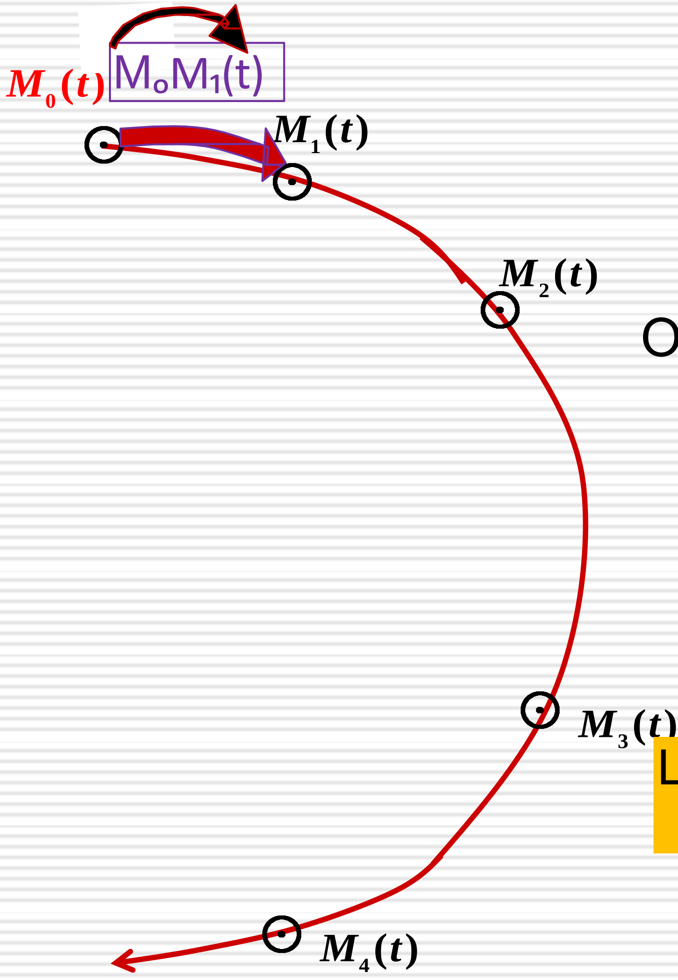
On peut définir la position d'un point dans l'espace de deux manières:

-A - Pour repérer la position d'un point matériel Mi dans l'espace, on se fixe un repère orthonormé.



Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$

-B - En considérant un point sur la trajectoire pris comme origine (M_o), on oriente la trajectoire, on obtient l' abscisse curviligne s(t).



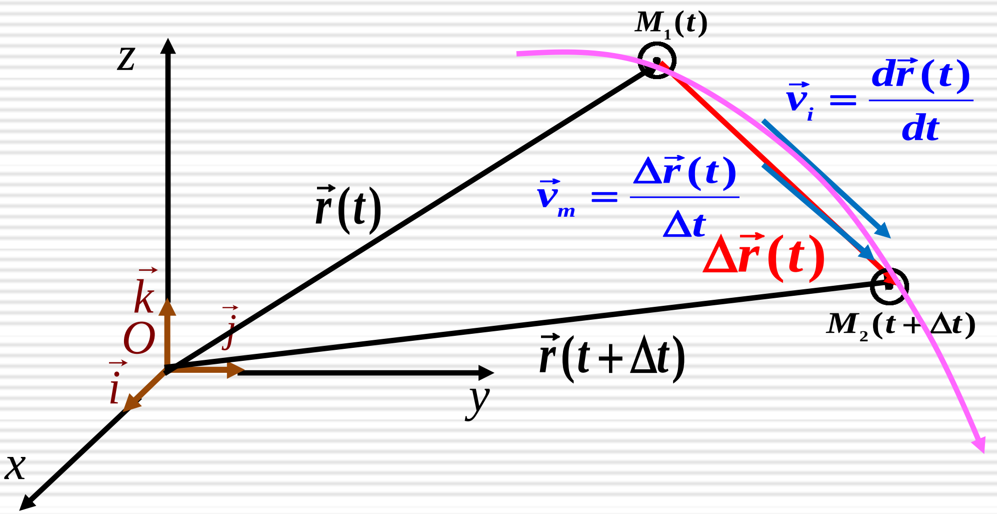
On parle d'abscisse curviligne notée :

$$S(t)=M_oM_i(t)$$

La loi décrivant s(t) en fonction du temps est appelée équation horaire

Vecteur vitesse d'un point :

Le vecteur vitesse moyenne est le rapport du vecteur déplacement sur l'intervalle de temps.



$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse moyenne est parallèle au vecteur déplacement

Vecteur vitesse instantanée :

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{S}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{S}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Vecteur accélération :

Accélération moyenne :

Elle caractérise la variation du vecteur vitesse

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{a}_m$ a le même sens et direction que $\Delta\vec{v}$

Accélération instantanée :

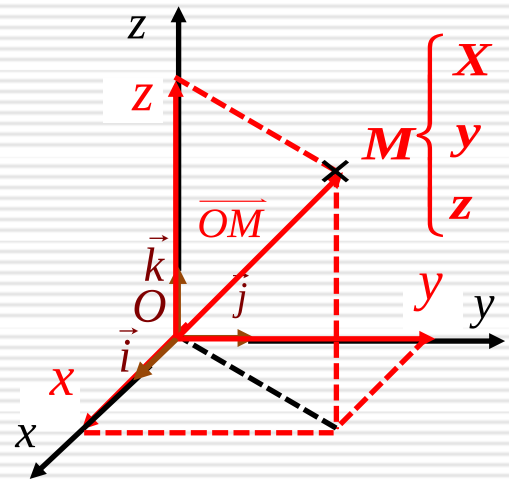
$$\vec{a}_m = \vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_i = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$$

On peut confondre l'accélération instantanée et l'accélération moyenne au milieu de l'intervalle de temps si Δt est très petit.

Étude de dans different systemes :

Coordonnées cartésiennes :



Vecteur position :

Le vecteur position est défini par les équations paramétrique du mouvement :x(t), y(t), z(t).

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Vecteur vitesse :

Vitesse moyenne:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} = v_{mx}\vec{i} + v_{my}\vec{j} + v_{mz}\vec{k}$$

Vitesse instantanée:

$$\vec{v}_i = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Vecteur accélération :

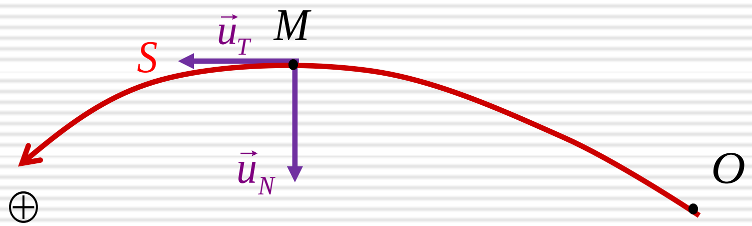
Accélération moyenne :

$$\vec{a}_m == \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k} = a_{mx}\vec{i} + a_{my}\vec{j} + a_{mz}\vec{k}$$

Accélération instantanée :

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Coordonnées curvilignes ou intrinsèques :



Abscisse curviligne: $S(t)=\overset{\frown}{OM}(t)$

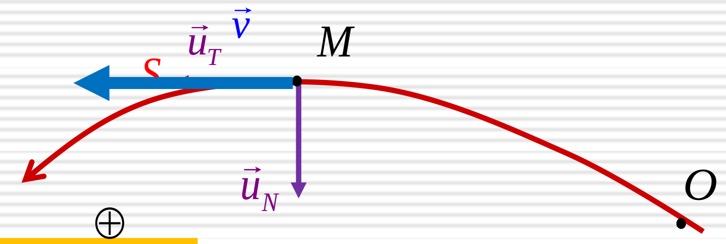
On définit les vecteurs unitaires:

$\vec{u}_T$: porté par la tangente à la trajectoire en M est orienté dans le sens positif

$\vec{u}_N$: porté par la perpendiculaire à la trajectoire et dirigée vers l'intérieur

Vitesse :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\vec{u}_T \quad \Rightarrow$$

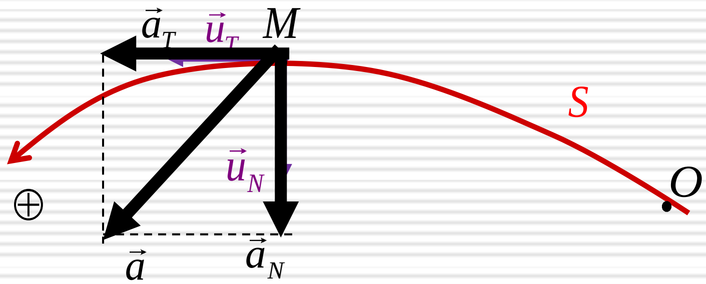


La vitesse est tangente à la trajectoire donc //uт: et son sens dépend du signe de (ds/dt).

Accélération :

Rappel : $\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}\vec{u}_T = v\vec{u}_T$

$$\boxed{\dfrac{d\vec{u}_T}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_N}$$

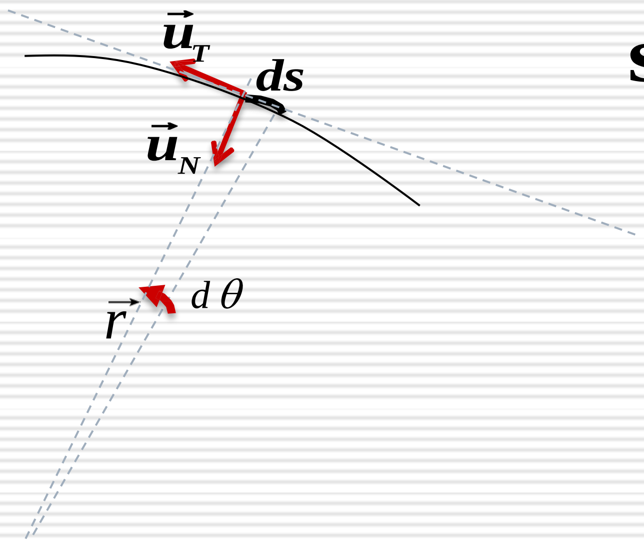


$$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\dfrac{d\vec{u}_T}{dt}$$

Donc: $$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_N$$

$$\vec{a}_T + \vec{a}_N = \vec{a} \qquad \boxed{a_T = \dfrac{dv}{dt} \quad ; \quad a_N = v\dfrac{d\theta}{dt}}$$

Mouvement circulaire :petit déplacement ds



$$\sin(d\theta) = tg(d\theta) = d\theta = \frac{ds}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$ds = r d\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}}$$

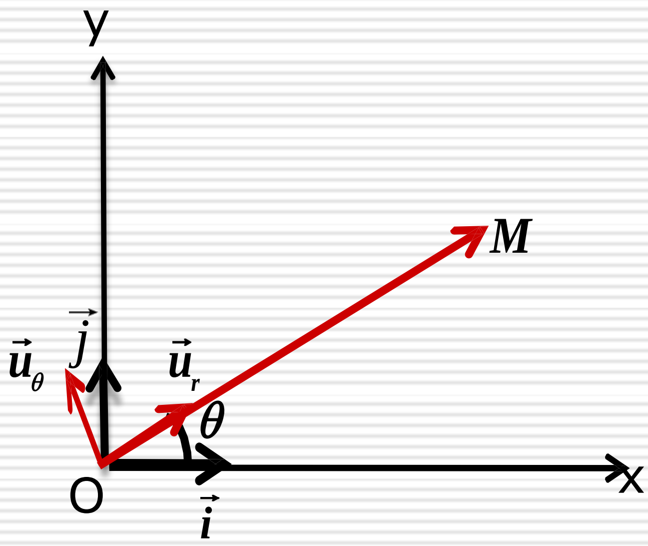
$$\Downarrow$$

$$a_N = v\frac{d\theta}{dt} = \frac{v^2}{r}$$

Coordonnées polaires :

Position:

On repère le point M par la distance OM=r et l’angle θ



$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

r(t) et θ(t) sont les équations paramétriques en coordonnées polaires

On prend deux vecteurs unitaires nouveaux : $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$

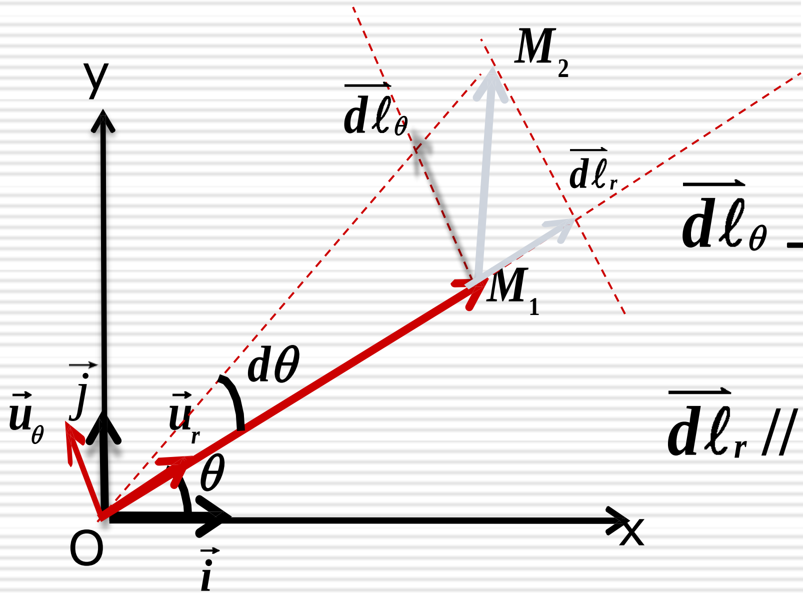
$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r$$

Déplacement

Soit un petit déplacement M_1M_2 vu sous un angle dθ très petit :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = \overrightarrow{d\ell_r} + \overrightarrow{d\ell_\theta}$$

dθ très petit :tg(dθ)=dθ=sindθ



$$\overrightarrow{d\ell_\theta} \perp \vec{u}_r et \overrightarrow{d\ell_\theta} // \vec{u}_\theta \Rightarrow$$

déplacement transversale
r=Cst et θ varible

$$\overrightarrow{d\ell_r} // \vec{u}_r et \theta = Cst \Rightarrow déplacement\ radiale.$$

$$\sin(d\theta) = d\theta = \frac{d\ell_\theta}{r} \Rightarrow d\ell_\theta = rd\theta$$

$$\overrightarrow{d\ell_r} = d\ell_r \vec{u}_r = dr\ \vec{u}_r$$

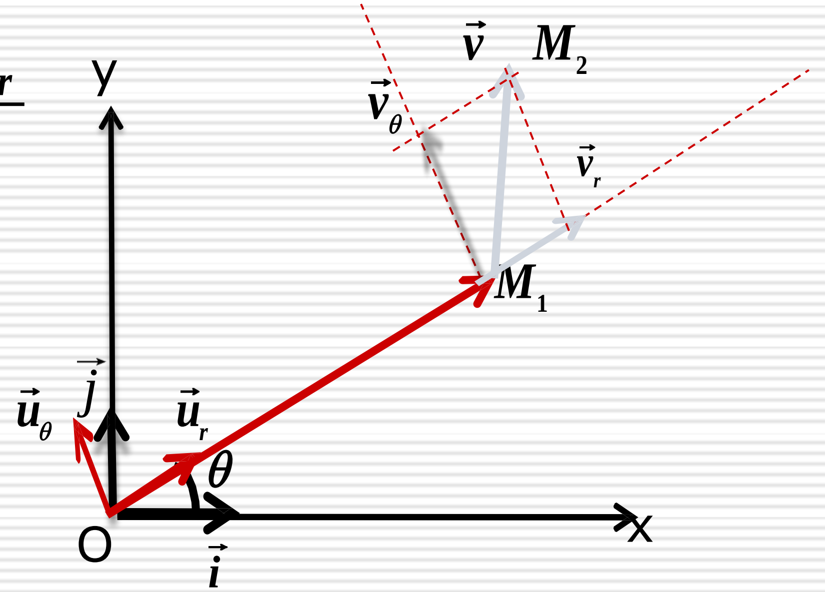
$$\overrightarrow{d\ell_\theta} = rd\theta\ \vec{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = rd\theta\ \vec{u}_\theta + dr\ \vec{u}_r et \left|\vec{r}\right| = \sqrt{(rd\theta)^2 + (dr)^2} = \left|ds\right|$$

Vitesse:

Nous dérivons le vecteur position :

$$\vec{r} = r\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$



Et comme : $\boxed{\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \quad et \quad \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_r}$

Alors : $$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

On décompose la vitesse suivant les deux axes : $$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta$$

Par identification on a : $$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r \quad et \quad \vec{v}_\theta = r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

Accélération:

On dérive le vecteur vitesse

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right)$$

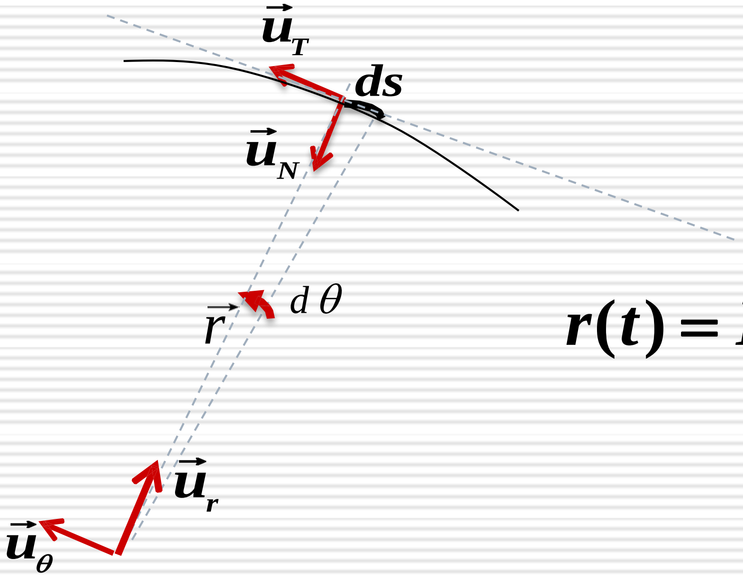
$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) + \left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\vec{u}_r + \left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \{a_r\}\vec{u}_r + \{a_\theta\}\vec{u}_\theta$$

Cas particulier :

Mouvement circulaire :



$$r(t) = R = Cst$$

$$\vec{u}_N = -\vec{u}_r \qquad \vec{u}_T = \vec{u}_\theta$$

$$r(t) = R\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \frac{dR}{dt}\vec{u}_r + R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\swarrow$$

$$\boxed{\frac{v}{R} = \frac{d\theta}{dt}}$$

$$\vec{v}(t) = (R\frac{d\theta}{dt})\vec{u}_\theta$$

$$\searrow \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + (R\frac{d\theta}{dt})(-\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r)$$

$$\vec{a}(t) = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_T + R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

Diapositive 39

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\vec{a}(t) = R\left(\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}\right)\vec{u}_T + R\left(\frac{v}{R}\right)^2\vec{u}_N \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} \quad et \quad a_N = \frac{v^2}{R}}$$

Exemple:

En coordonnées polaires le mouvement d'un mobile est décrit par les équations

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix} r(t)=\dfrac{t^2}{2} \\ \theta(t)=\dfrac{\pi t}{4} \end{pmatrix}$$

Dessiner les vecteurs position, vitesse et accélération à t = 1s

Echelle:

1 cm	0.2 m
1 cm	0.4 m/s
1 cm	0.7 m/s2

Vecteur position:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt}=t; \quad \dfrac{d^2r}{dt^2}=1; \quad \dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{\pi}{4}; \quad \dfrac{d^2\theta}{dt^2}=0 \end{cases}$$

$$\left(\overrightarrow{OM}(1)\right)\begin{cases} \dfrac{1}{2}\rightarrow 2.5cm \\ \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

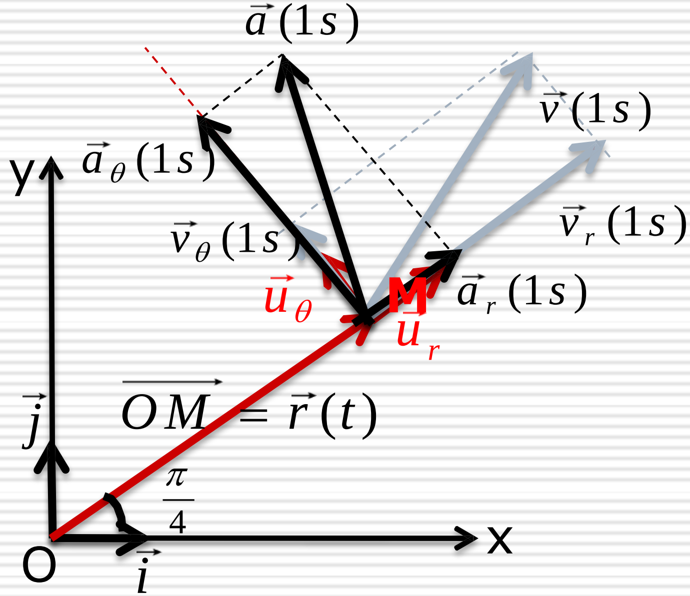
Vecteur vitesse:

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_r=\dfrac{dr}{dt} \\ v_\theta=r\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases} \qquad \vec{v}(1)\begin{cases} v_r=1m/s\rightarrow 2.5cm \\ v_\theta=\dfrac{\pi}{8}=0.39m/s\rightarrow 1cm \end{cases}$$

Vecteur accélération:

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_r = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ a_\theta = 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

$$\vec{a}(1)\begin{cases} a_r = (1-\dfrac{\pi^2}{32}) = 0.69 m/s^2 \rightarrow 1cm \\ a_\theta = \dfrac{\pi}{4} = 0.77 m/s^2 \rightarrow 1cm \end{cases}$$



Coordonnées cylindriques :

En coordonnées cylindriques le mouvement d'un mobile est décrit par les équations :

Vecteur position: $\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \\ z(t) \end{cases}$

Vecteur vitesse: $\vec{v}(t) \begin{cases} v_r(t) \\ v_\theta(t) \\ v_z(t) \end{cases}$

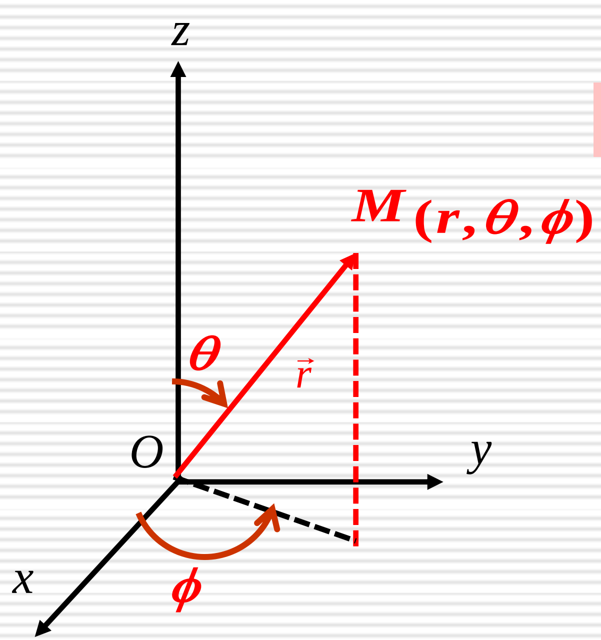
Vecteur accélération: $\vec{a}(t) \begin{cases} a_r(t) \\ a_\theta(t) \\ a_z(t) \end{cases}$

Vecteur déplacement: $ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 + dz^2$

Coordonnées sphériques :

En coordonnées sphériques le mouvement d'un mobile est décrit par les équations :

Coordonnées sphériques



Vecteur position:

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \\ \phi(t) \end{cases}$$

Vecteur déplacement:

$$ds^2 = dr^2 + (rd\phi)^2 + (r\sin\theta d\theta)^2$$

Complément sur le mouvement circulaire uniforme :

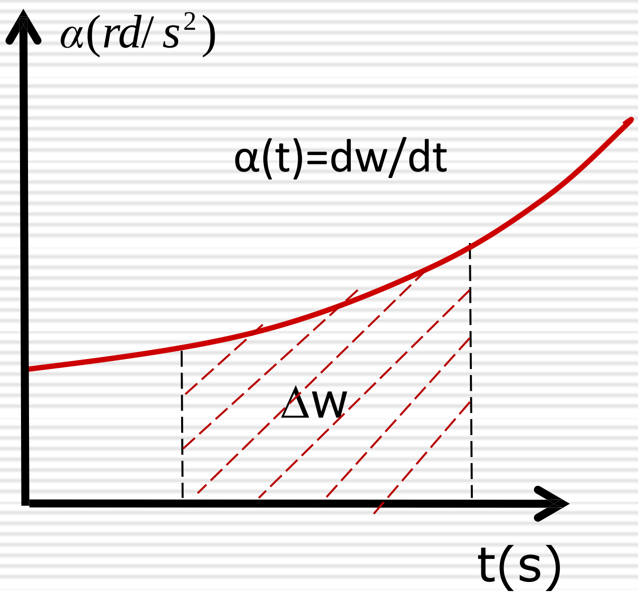
$$r(t) = R$$
$$\theta(t) = \theta(t)$$
$$dS(t) = Rd\theta \Rightarrow S(t) = R\theta$$

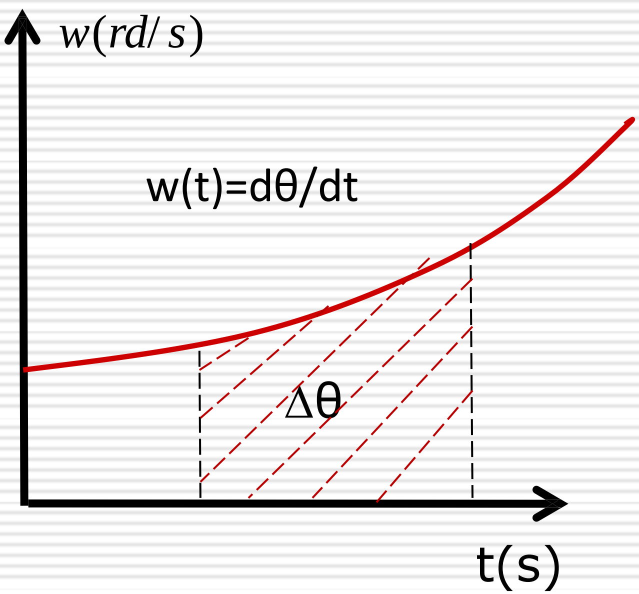
$$\Rightarrow \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$avec\ \omega = \frac{d\theta}{dt} rd / s$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} : \quad vitesse\ angulaire$$

$$\left.\begin{array}{l} a(t) = \dfrac{dv}{dt} = R\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\alpha \\ \alpha = \dfrac{d\omega}{dt} \ : accélération\ angulaire \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{a}_T = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T = R\alpha\vec{u}_T \\ \vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N = \omega^2 R\vec{u}_N \end{array}\right.$$





L'aire sous la courbe

α(t)=dw/dt est égale Δw.

L'aire sous la courbe

w(t)=dθ/dt est égale Δθ.

Mouvement circulaire uniforme →w=Cst →Mouvement périodique.

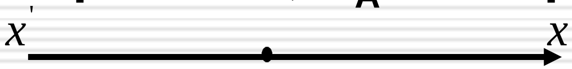
T est la période du Mvt. Le Mvt se reproduit identiquement

à chaque fois que l'angle θ=wt, 2π=wTdonc T=2π/w et f=1/T

Mvt signifie mouvement

Mouvement harmonique (Rectiligne sinusoidale) :

(I)- Soit un mobile, A, se déplaçant sur un axe **ox** suivant la loi horaire :
$X_A(t) = R\cos(\phi) = R\,\mathrm{Cos}(\omega t + \varphi)$; R=0.5m
Le mouvement est sinusoïdal d'amplitude R, de pulsation ω et de phase ϕ**=(ωt + φ). On suppose qu'à t=0s, X_A**=R **et qu'à t= (π/2ω) s, la vitesse est V_A= -(π/2) m/s.**



1°)- Calculer la phase à l'origine des temps, φ, et la pulsation, ω . En déduire la période **T= 2π/ω et la fréquence f =1/T. Expliquer brièvement à quoi correspondent T et f.**

$$x_A(t) = R\cos(\omega t+\varphi);\ v_A(t) = -R\omega\sin(\omega t+\varphi);\ \ a_A(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\grave{a}\ t = 0s,\ x_A(0) = R = R\cos(\varphi) \Rightarrow \varphi = 0\ et\ v_A(\frac{\pi}{2\omega}) = -R\omega = -\frac{\pi}{2} m/s \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2R} = \pi\, rd/s.$$

$$\phi : phase\ du\ movement. \quad \varphi : phase\ \grave{a}\ l'origine. \quad \omega : pulsation\ du\ movement.$$

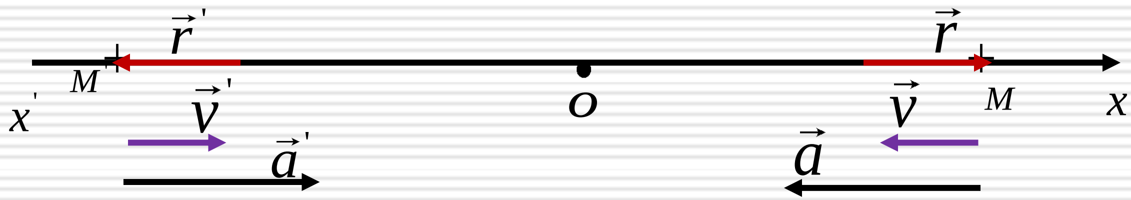
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2s\ et\ f = \frac{1}{T} = 0.5Hz.\ (T\ et\ f\ sont\ les\ p\acute{e}riode\ et\ fr\acute{e}quence\ du\ mouvement).$$

La période T correspond à la durée pendant laquelle le mobile revient à la même position dans le même sens. La fréquence f est le nombre de fois que le mobile passe par cette position dans le même sens,.

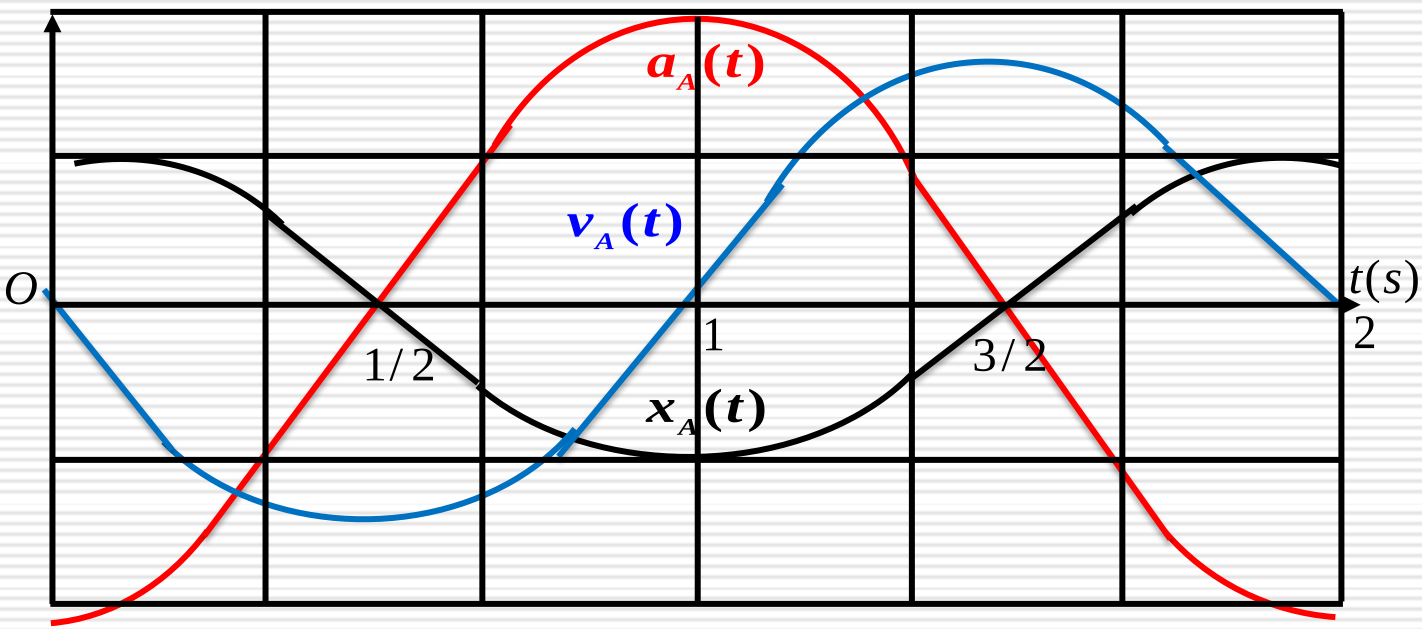
2°)- Etablir une relation entre $x_A(t)$ et l'accélération a_A (t).

$$x_A(t) = R\cos(\omega t + \varphi);\ v_A(t) = -R\omega\sin(\omega t + \varphi);\ \ a_A(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{a_A(t) = -\omega^2 x_A(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}(t) = -\omega^2\overrightarrow{OM}(t) = -\omega^2\vec{r}(t)}$$

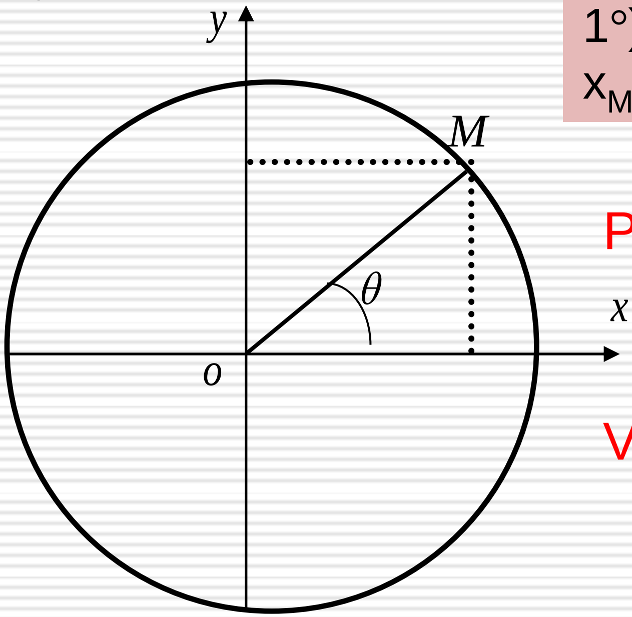


3°)- Représenter qualitativement sur une période T les graphes $x_A(t)$, $v_A(t)$ et $a_A(t)$.



$\omega = \pi \quad x_A(t) = R\cos(\omega t) \quad v_A(t) = -R\omega\sin(\omega t) \quad a_A(t) = -\omega^2 R\cos(\omega t)$

(II)- Soit un deuxième mobile M, astreint à se déplacer sur une trajectoire circulaire de centre **O** et de rayon R. Sa vitesse angulaire est $\omega = d\theta/dt$. On suppose qu'à t=0s, $\theta = 0$ rad.



1°)- Ecrire, dans le repère **(o, x, y)** ,les coordonnées de M **,** $x_M(t)$ et $y_M(t)$. Préciser la nature du mouvement.

Position:

$$x_M(t) = R\cos\omega t; \quad y_M(t) = R\sin\omega t$$

$$x^2{}_M + y^2{}_M = R^2 \Rightarrow$$ Mouvement circulaire

Vitesse:

$$v_x(t) = -R\omega\sin\omega t; \quad v_y(t) = \omega R\cos\omega t$$

$$v^2 = v^2{}_x + v^2{}_y = (\omega R)^2$$

$$v = \omega R = Cst \Rightarrow$$ Mouvement circulaire uniforme.

Si $\omega = d\theta/dt \rightarrow$ Mouvement circulaire varié.

2°)- Comment, à partir du mouvement de M, peut-on définir le mouvement de A ?

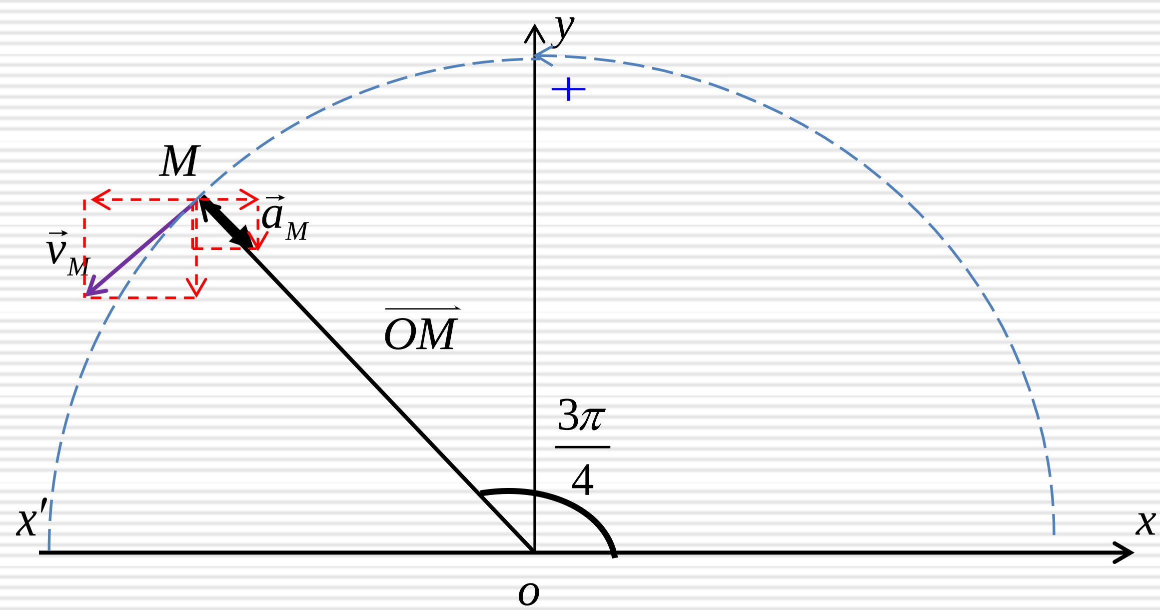
Le mouvement de A apparait comme la projection du mobile M à chaque instant sur les axes x'ox et y'oy.

3°)-Représenter, à **t=**0.75s, les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}_M$, et $\vec{a}_M$, accélération.
Echelle: 1cm → 0.1 m ; 1cm → (π/4) m/s et 1cm → π²/2 =5m/s²

$$t = \frac{3}{4} = 0,75s; \qquad \theta = \omega t = \frac{3\pi}{4}; \qquad \bar{x} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow 3,5cm; \qquad \bar{y} = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow 3,5cm$$

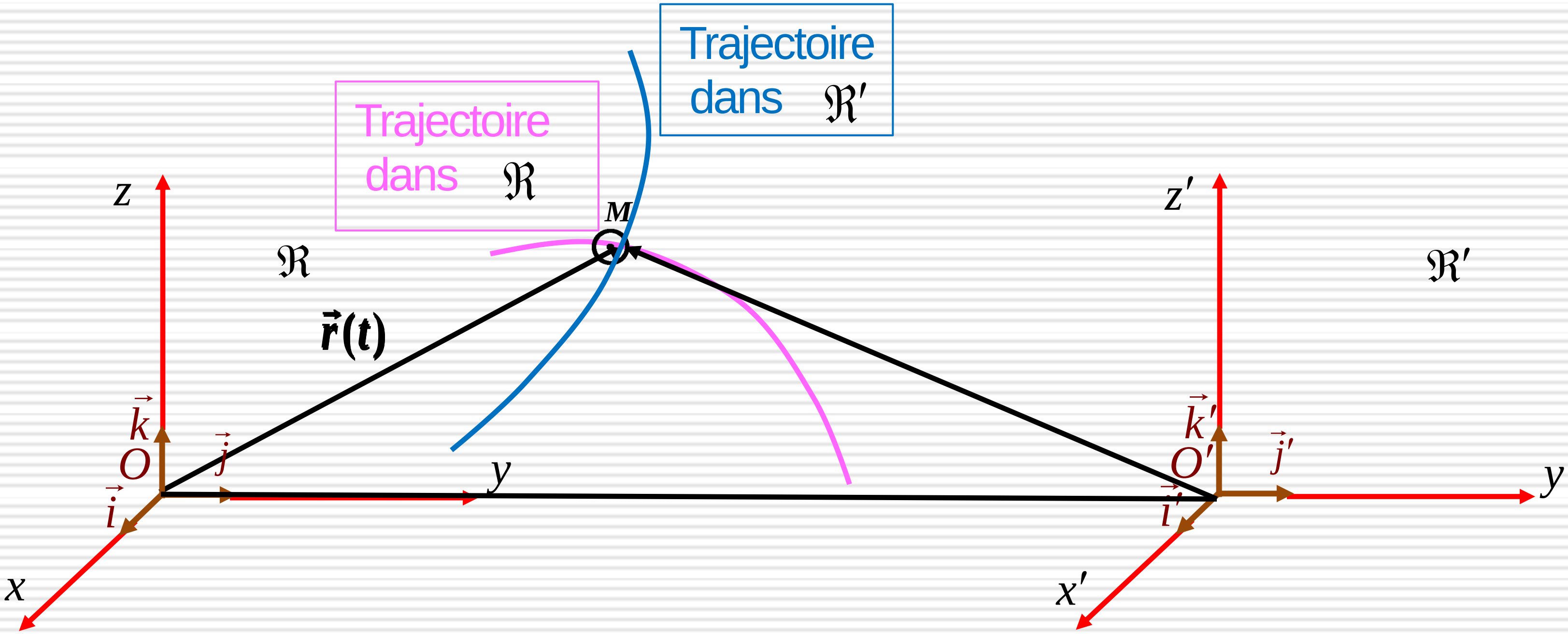
$$t = \frac{3}{4} = 0,75s. \qquad \bar{v}_x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi m/s \rightarrow 1,4cm. \qquad \bar{v}_y = -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi m/s \rightarrow 1,4cm.$$

$$t = \frac{3}{4} = 0,75s. \qquad \bar{a}_x = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2 m/s^2 \rightarrow 0,7cm. \qquad \bar{a}_y = -\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2 m/s^2 \rightarrow 0,7cm.$$



Changement de repère ou mouvement relatif:

Soit deux repères R fixe et R' en mouvement par rapport à R .



Vecteur position: $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OO'}(t) + \overrightarrow{O'M}(t)$

Dans $\Re$: $\overrightarrow{OM}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ Dans $\Re'$: $\overrightarrow{O'M}(t) = \vec{x}'\vec{i}' + \vec{y}'\vec{j}' + \vec{z}'\vec{k}'$

Vecteur vitesse:

La vitesse par rapport à R est dite absolue et notée $v_a = v_{M/R}$

La vitesse par rapport à R' est dite relative et notée $v_r = v_{M/R'}$

Vitesse absolue: $$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Vitesse relative : $$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}$$

Calcul de la vitesse :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + \frac{d}{dt}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$\vec{v}_a = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right) + \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{R'/R}$$

Vitesse d'entrainement: $\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$

Vitesse de translation du repère: $\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt}$

Vitesse de rotation du repère: $x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$

Vecteur accélération:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

En dérivant on obtient : $$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_e}{dt}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \Rightarrow \vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_{R'/R} + \vec{a}_c$$

Accélération absolue: $\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

Accélération relative: $\vec{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$

Accélération entrainement: $\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$

Accélération Coriolis: $\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$

Cas particuliers:

* Si R' décrit un mouvement de translation donc le terme de rotation du repère est nul.

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}=0 \Rightarrow \vec{v}_e=\frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{a}_e=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}(t)}{dt^2} \quad \vec{a}_c=\vec{0}$$

•Si en plus le mouvement de R'/R est uniforme alors
:

$$\vec{a}_e=0, \quad et \quad \vec{a}_c=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_a=\vec{a}_r$$

Exercice : 16

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel R muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont données en fonction du temps par :

$$x = t^2 - 4t + 1; \quad y = -2t^4; \quad z = 3t^2$$

Dans un deuxième référentiel (R') muni du repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ avec $(\vec{i} = \vec{i}'; \vec{j} = \vec{j}'; \vec{k} = \vec{k}')$ sont données en fontion du temps

$$x' = t^2 + t + 2; \quad y' = -2t^4 + 5; \quad z' = 3t^2 - 7$$

1) Exprimer la vitesse de M dans (R) en fonction de sa vitesse dans (R').

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = -2t^4 \\ z = 3t^2 \end{cases} \quad \vec{v}\begin{cases} v_x = 2t - 4 \\ v_y = -8t^3 \\ v_z = 6t \end{cases} \quad \overrightarrow{OM}\begin{cases} x' = t^2 + t + 2 \\ y' = -2t^4 + 5 \\ z' = 3t^2 - 7 \end{cases} \quad \vec{v}'\begin{cases} v'_x = 2t + 1 \\ v'_y = -8t^3 \\ v'_z = 6t \end{cases}$$

$$\textit{en déduit} : v_x = v'_x - 5, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z$$

2) Exprimer l'accélération de M dans (R) en fonction de son accélération dans (R').

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = -24 \\ a_z = 6 \end{cases} \qquad \vec{a}'\begin{cases} a'_x = 2 \\ a'_y = -24 \\ a'_z = 6 \end{cases} \quad en\ déduit : a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z$$

3) Définir la nature du mouvement d'entraînement de (R) par rapport à (R').

Pour définir le mouvement d'entrainement de (R) par rapport à (R') il faut calculer ses vitesse:

$$\vec{V}_{M/O} = \vec{V}_{M/O'} + \vec{V}_{O'/O} = \vec{V}_{M/O'} - \vec{V}_{O/O'} \quad \vec{V}_{O'/O} = \vec{V}_{M/O} - \vec{V}_{M/O'} = -5\vec{i}$$

$$\vec{a}_{O'/O} = \vec{a}_{M/O} - \vec{a}_{M/O'} = 0$$

Le repère (R') est en mouvement rectiligne uniforme avec v=5m/s. cette vitesse est appelée vitesse d'entrainement (translation) de (R') par rapport à (R) .

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} t^2-4t+1 \\ -2t^4 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{O'M}\begin{pmatrix} t^2+t+2 \\ -2t^4+5 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{M/O}\begin{pmatrix} 2t-4 \\ -8t^3 \\ 6t^3 \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_{M/O'}\begin{pmatrix} 2t+1 \\ -8t^3 \\ 6t^3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{O'/O} = (\vec{V}_{O'/M} + \vec{V}_{M/O}) = (\vec{V}_{M/O} - \vec{V}_{M/O'}) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$