Dynamique du point

Par A.DIB

La dynamique est une branche de la mécanique qui étudie les causes qui provoquent les mouvements des corps. Dans ce chapitre nous décrirons des mouvements

Copernic (1473-1543)

Johannes Kepler (1571-1630)

Galilée (1594–1642)

Introduction

Dans ce chapitre nous décrirons des mouvements nous en déduisons des lois de force, puis nous passerons à l'étape suivante, la prévision d'autre mouvements.

C'est un peu de cette manière que l'on procède historiquement. On a commencé à observer des mouvements, ceux des corps célestes en premier. Ces mouvements célestes ont été notés très soigneusement par certains observateurs, tel que Tycho et Brahé. A partir de ces observations on à pu déduire les lois cinématique des mouvements avec Képler, puis exprimer ces lois en terme de de force avec Newton.

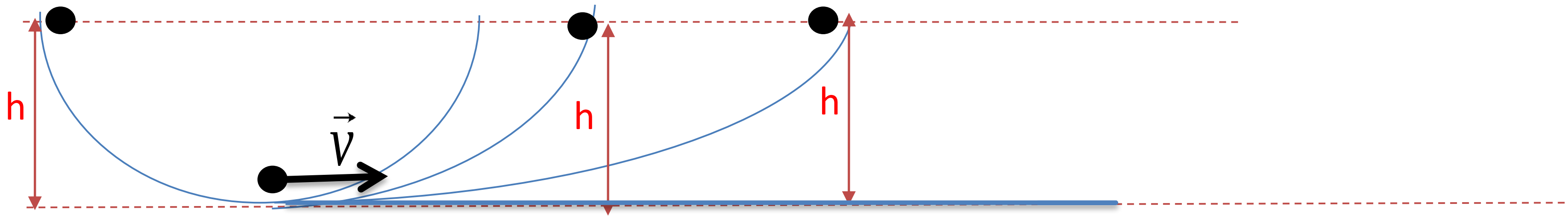
Principe d'inertie

C'est **Galilée** qui à le premier suggéré ce principe,

si un objet n'est soumis à aucune forces,

-soit il continue à ce déplacer en ligne droite avec la même vitesse,

-soit il reste au repos, il l'était déjà.



Pour reprendre l'expérience de Galilée on utilise une table à coussin d'air horizontale.

Une telle affirmation n'est pas évidente: d'habitude à la surface de la terre, un corps en mouvement abandonné lui-même à tendance à s'arrêter. Nous savons qu'il existe une force qui provoque son arrêt: il est extrêmement difficile d'observer un objet qui ne soit soumis à aucune force.

1-Enoncé du principe d'inertie

Une particule libre, ou isolée, se déplace en ligne droite à vitesse constante.

Table à coussin d’air horizontale.

Le principe d'inertie tel que nous l'avons énoncé est une approche d'une définition de la force: dés que nous observons une particule accélérée, nous dirons qu'elle n'est ni libre, ni isolée, mais qu'elle est soumise à une force.

Cependant, ce principe ne peut être valable pour tous les observateurs car, comme nous l'avons vu au chapitre précédant , le mouvement est une notion relative à l'observateur.

Exemple: soit un mobile M, et deux observateurs o_1 et o_2. o_1 est accéléré par rapport à o_2.

o_1 mesure: $\vec{V}_{M/O_1} = Cst$

o_2 mesure une accélération de M

Pour **o_1** le mobile M est libre, pour **o_2** le mobile n'est pas libre.

Donc il nous faut préciser par rapport à qu'el système de référence nous exprimons la loi d'inertie.

2-Référentiel d'inertie, ou Galiléens.

C'est un repère dans lequel une particule libre se déplace à vitesse constante en ligne droite.

Pour trouver un tel repère il faudrait s'arranger pour avoir une particule libre, vraiment isolée, loin de tout le reste du monde pour que toutes interactions avec les autres particules soient négligeables

Cette démarche « rigoureuse » n'est qu'une vue de l'esprit, car on ne peu pas faire disparaitre totalement le reste du monde, l'environnement de la particule.

Grace à la mécanique classique qui définit l'accélération des particules exclusivement à partir des caractéristiques de cette particule(masse, charge,….) et de la présence d'un environnement matériel qui l'entoure.

En conclusion on veut attribuer à la force (l'accélération)une origine matériel.

L'expérience montre qu'une telle physique n'est possible que si les mouvement sont étudiés par rapport à certains repère: **repère d'inertie ou repère Galiléens**.

Une particule qui se déplace dans un repère Galiléen en mouvement rectiligne uniforme n'est soumise à aucune force (ou la somme des forces agissant se compensent).

Il faut prendre un repère avec des systèmes d'axes reliés au centre de la terre et diriges vers d'autre planètes(c'est un repère Galiléen) pour faire l'étude des mouvement.

La quantité de mouvement

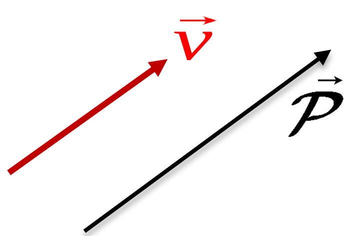
La masse (inertielle) étant invariante en mécanique classique

Le problème qu’on doit étudier de façon dynamique, c’est le mouvement non uniforme d’une particule.
Il faut une cause pour modifier la grandeur ou la direction de la vitesse de l’objet(FORCE).

Plus la masse de l’objet est importante plus il est difficile de modifier V. Donc il est difficile d’accéléré ou de freiner un objet de masse importante.

MASSE: INERTIE d’un corps, cela veut dire Résistance que le corps oppose à tout changement de V.

Nous définissons la quantité de mouvement d’une particule comme le produit de la masse par la vitesse:



$\vec{\mathcal{P}} = m\vec{v} \quad (kgm/s) \quad \vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{v}$: sont parallèles et dans le même sens

La quantité de mouvement est une **grandeur vectorielle** qui a la même direction que la vitesse.

Enoncé du principe d'inertie

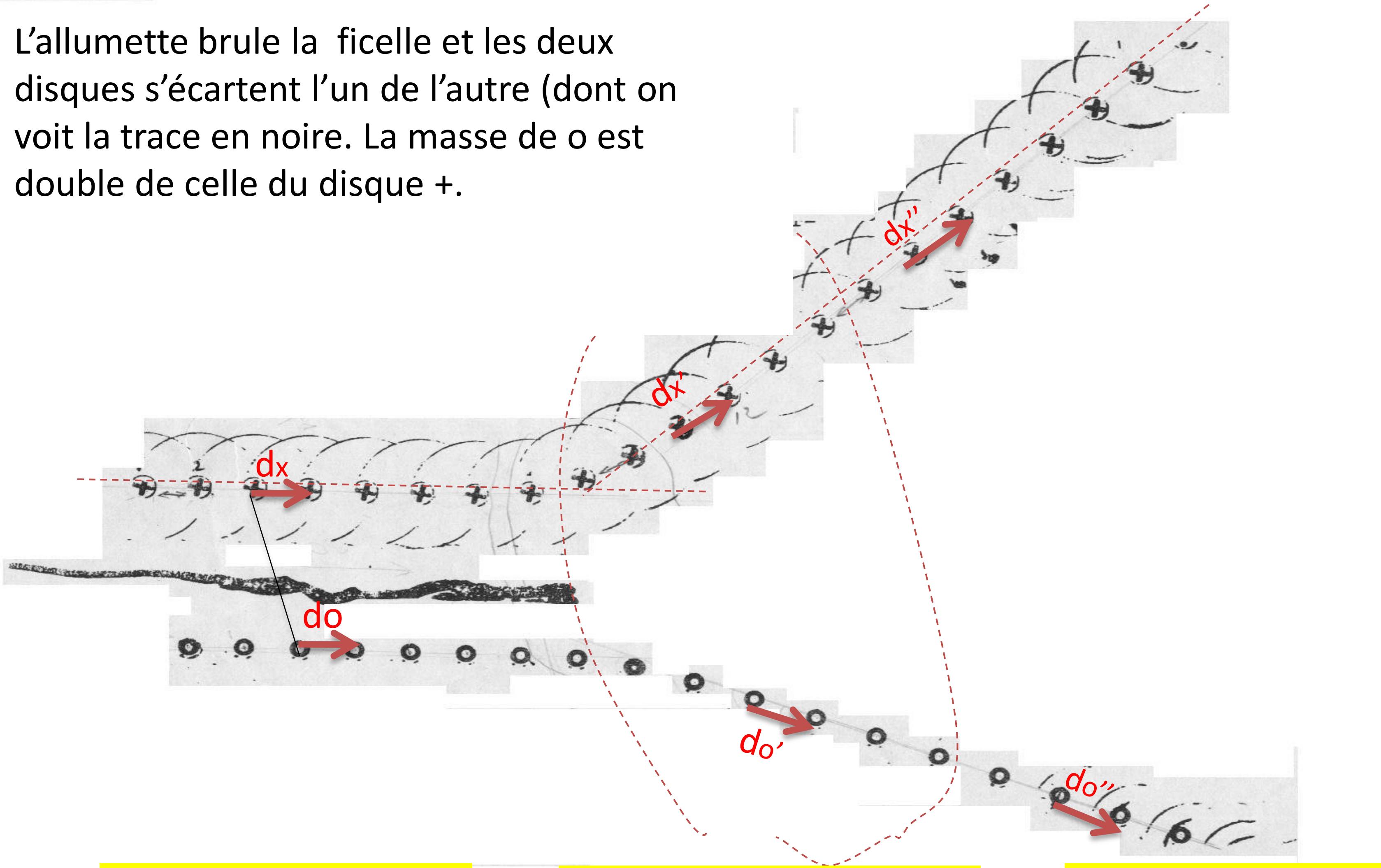
Une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère Galiléen.

Conservation de la quantité de mouvement

Pour étudier l'interaction d'une particule avec son environnement, nous choisissons l'objet d'étude le plus simple possible: celui d'une particule en interaction avec une autre particule. Pour cela, nous nous plaçons dans les conditions expérimentale telles que les actions du monde extérieur soient négligeable ou se compensent.

Deux disques aimantés (o et +) sont reliés par une ficelle, sont en mouvement avec la même vitesse.

L'allumette brule la ficelle et les deux disques s'écartent l'un de l'autre (dont on voit la trace en noire. La masse de o est double de celle du disque +.



Avant interaction

Pendant interaction

Après interaction

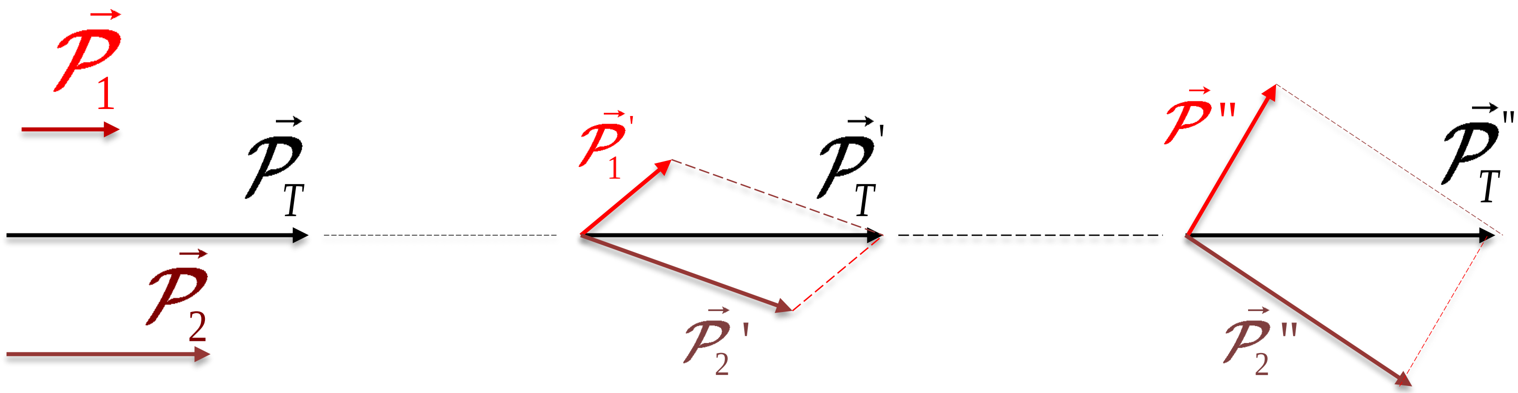
Avant de bruler la ficelle les quantités de mouvement des deux particules sont:

$$\vec{\mathcal{P}}_1 = m_1\vec{v}_0 \quad ; \quad \vec{\mathcal{P}}_2 = m_2\vec{v}_0 \quad donc \quad \vec{\mathcal{P}}_T = \vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2$$

A un instant donné de l'interaction **(pendant l'interaction)** les quantités de mouvement:

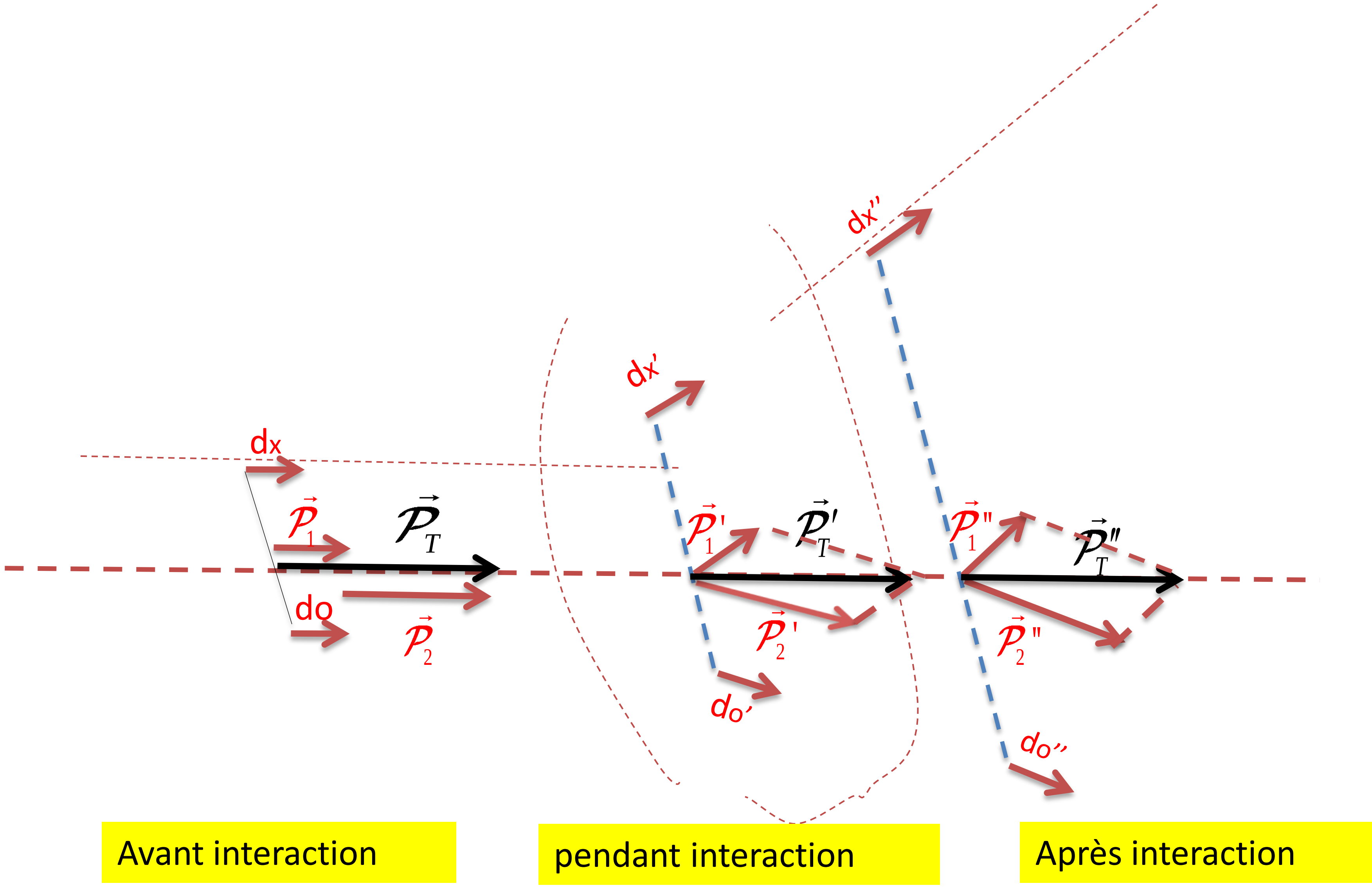
$$\vec{\mathcal{P}}_1' = m_1\vec{v}_1' \quad ; \quad \vec{\mathcal{P}}_2' = m_2\vec{v}_2' \quad donc \quad \vec{\mathcal{P}}_T' = \vec{\mathcal{P}}_1' + \vec{\mathcal{P}}_2'$$

Apres l'interaction $\vec{\mathcal{P}}_1'' = m_1\vec{v}_1'' \quad ; \quad \vec{\mathcal{P}}_2'' = m_2\vec{v}_2'' \quad donc \quad \vec{\mathcal{P}}_T'' = \vec{\mathcal{P}}_1'' + \vec{\mathcal{P}}_2''$



A tout instant, avant, pendant, après l'interaction, on trouve toujours que: $\vec{\mathcal{P}}_T = \vec{\mathcal{P}}_T' = \vec{\mathcal{P}}_T''$

En d'autres termes**: la quantité de mouvement totale du système isolé des deux particules est conservée (module, direction et sens).**



$$\vec{\mathcal{P}}_T = \vec{\mathcal{P}}_T' = \vec{\mathcal{P}}_T''$$

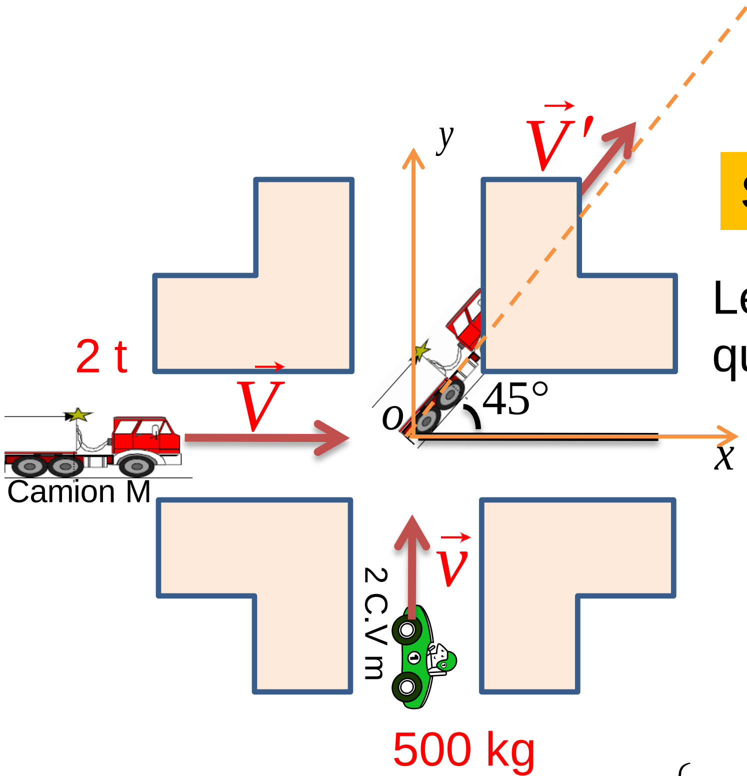
La conservation de la quantité de mouvement signifie qu'à deux instant t et t' les quantités de mouvement totales du système des deux particules sont égales.

$$\vec{\mathcal{P}}_T = \vec{\mathcal{P}}_T^{\,'} \quad donc \quad \vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2 = \vec{\mathcal{P}}_1^{\,'} + \vec{\mathcal{P}}_2^{\,'} \quad \Rightarrow \vec{\mathcal{P}}_1^{\,'} - \vec{\mathcal{P}}_1 = -\vec{\mathcal{P}}_2^{\,'} + \vec{\mathcal{P}}_2 \Rightarrow \Delta\vec{\mathcal{P}}_1 = -\Delta\vec{\mathcal{P}}_2$$

Ainsi La quantité de mouvement « perdue »par l'une des particules est égale et opposée à la quantité de mouvement « gagnée »par l'autre. $\Delta\vec{\mathcal{P}}_1 = -\Delta\vec{\mathcal{P}}_2$

Remarque: lorsque les force extérieurs existent elles produisent sur chacune des particules du système considéré une variation de quantité de mouvement supplémentaire, ce qui revient à mettre en défaut le principe de conservation.
<u>Cependant si ces forces sont faibles par rapport aux forces internes entre particule du système, on pourra considérer pendant le temps de l'interaction que le système est isolé</u>. Au cour d'une collision entre deux voitures les seules forces à considérer sont celles qui s'exercent entre les deux voitures, **considérablement plus grandes que les forces de frottements.**

Exemple: Un camion et une 2 CV arrivent sur un croisement. Elles rentrent en collision et se déplacent dans une direction de 45° en restant collées l'une à l'autre.



Un témoin affirme que le camion roulait à 80 km/h. Dit – il la vérité?

Solution : Après la collision : $\vec{\mathcal{P}}'_T = \vec{\mathcal{P}}'_c + \vec{\mathcal{P}}'_v = (M+m)\vec{V}'$

Le système est isolé donc il y conservation de la quantité de mouvement totale

Avant la collision : $\vec{\mathcal{P}}_T = \vec{\mathcal{P}}_c + \vec{\mathcal{P}}_v = M\vec{V} + m\vec{v}$

Conservation : $\vec{\mathcal{P}}_T = \vec{P}'_T \Rightarrow M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\vec{V}'$

$$M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\vec{V}'$$

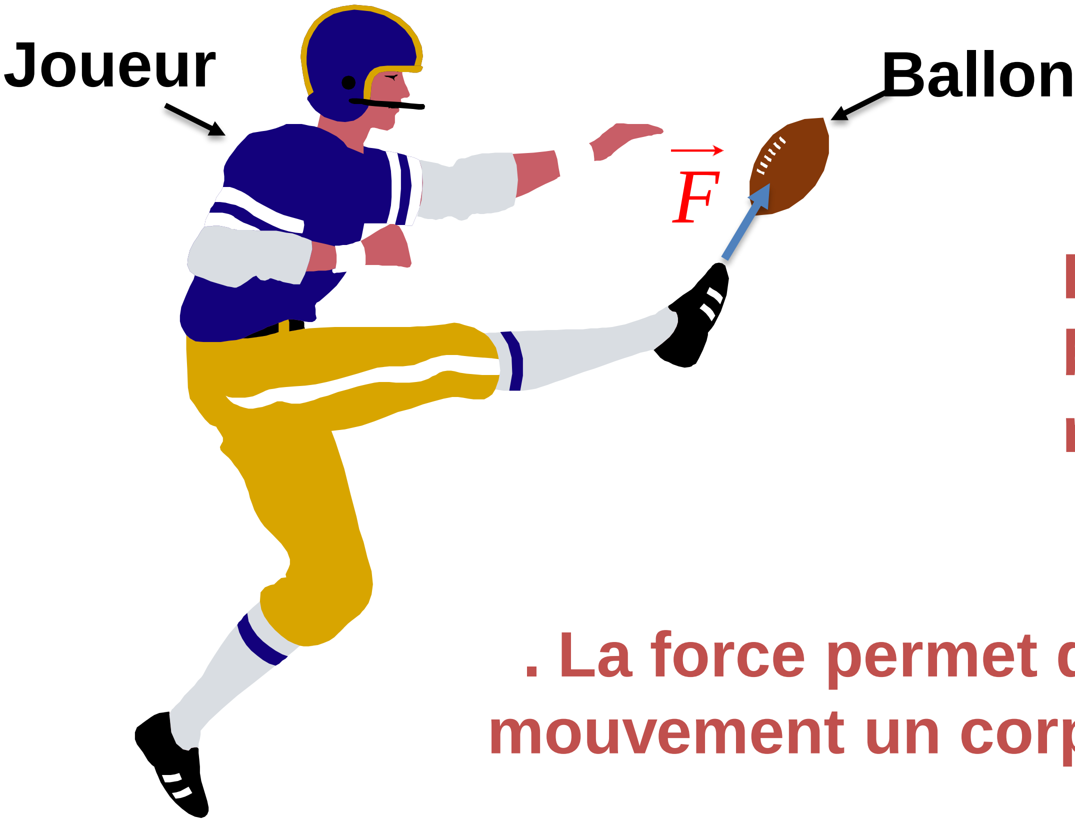
On décompose sur ox et oy

$$\begin{cases} ox: \quad MV = (M+m)V'\cos\alpha --- (1) \\ oy: \quad mv = (M+m)V'\sin\alpha --- (2) \end{cases} \Rightarrow (2)/(1)$$

$$320\, km/h = v = \frac{M}{m}V \Leftarrow \frac{mv}{MV} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg45° = 1$$

impossible

Notion de Force



Le tir du joueur sur le ballon provoque sa mise en mouvement.

. La force permet de mettre en mouvement un corps

Dynamique d’une particule(lois de Newton)

Nous nous sommes intéresses à deux ou plusieurs particules formant un système isolé. Dans de nombreux cas nous n’observant le mouvement que d’une seule particule. Dans cette situation nous allons résumer les interactions de la particule considérée avec le reste du système en introduisant l’action de toutes les autres particules du système **« FORCE ».**

Nous définissons **la force moyenne** à laquelle est soumise la particule pendant l’interaction (pour un intervalle de temps Δt)par:

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{\mathcal{P}}}{\Delta t}$$

Nous appelons **la force instantanée** appliquée à la particule la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$$

Reprenons le système de deux particule en interaction.

$$\vec{\mathcal{P}}_1 = m_1\vec{v}_0 \quad ; \quad \vec{\mathcal{P}}_2 = m_2\vec{v}_0 \quad donc \quad \vec{\mathcal{P}}_T = \vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2$$

$$\vec{\mathcal{P}}_1' = m_1\vec{v}_1' \quad ; \quad \vec{\mathcal{P}}_2' = m_2\vec{v}_2' \quad donc \quad \vec{\mathcal{P}}_T' = \vec{\mathcal{P}}_1' + \vec{\mathcal{P}}_2'$$

Conservation de la quantité de mouvement: $\Rightarrow \vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2 = \vec{\mathcal{P}}_1' + \vec{\mathcal{P}}_2'$

$$-\Delta\vec{\mathcal{P}}_2 = \Delta\vec{\mathcal{P}}_1 \quad \Leftarrow -(\vec{\mathcal{P}}_2' - \vec{\mathcal{P}}_2) = \vec{\mathcal{P}}_1' - \vec{\mathcal{P}}_1 \quad \swarrow$$

Il en résulte: $\Rightarrow \dfrac{\Delta\vec{\mathcal{P}}_1}{\Delta t} = -\dfrac{\Delta\vec{\mathcal{P}}_2}{\Delta t}$

En réduisant le temps: ($\Delta t \to 0$) $\Rightarrow \dfrac{d\vec{\mathcal{P}}_1}{dt} = -\dfrac{d\vec{\mathcal{P}}_2}{dt}$

La force appliquée par la particule 2sur la particule 1($F_{2/1}$) est égale et opposée à La force appliquée par la particule 1sur la particule 2($F_{1/2}$)

$$\boxed{\vec{F}_{2/1} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}_1}{dt} = -\vec{F}_{1/2} = -\frac{d\vec{\mathcal{P}}_2}{dt}}$$

Troisième loi de Newton

Lois de Newton

-La force appliquée à une particule est égale par définition à la dérivé de sa quantité de mouvement par rapport au temps:

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$$

Isaac Newton
(1643–1727)

Enoncé du principe d'inertie

Nous dirons en particulier que la force appliquée une particule est nulle, si elle est en mouvement rectiligne uniforme(a=0). **Première loi de Newton**

$$\vec{F} = 0$$ **Première loi de Newton**

-si un corps de masse m se déplace avec une vitesse: $\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Deuxième loi de Newton

Remarque: il est important de noté que les lois de Newton sont valables dans n'importe quel système de référence Galiléen, comme nous l'avons dit.

Deux observateurs Galiléen en mouvement l'un par rapport à l'autre , mesure la vitesse d'une particule de masse m en deux instant différent t et t'.

$$\vec{v}'_{2/1} = \vec{v}_{2/1} \; et \; \vec{v}'_{1/2} = \vec{v}_{1/2}$$

Observateur:1

À t O_1 mesure: $\vec{v}_{m/O_1} \; et \; \vec{\mathcal{P}}_1 = m\vec{v}_{m/O_1}$

À t' O_1 mesure: $\vec{v}'_{m/O_1} \; et \; \vec{\mathcal{P}}'_1 = m\vec{v}'_{m/O_1}$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{\mathcal{P}}_{/O_1} = m(\vec{v}'_{m/O_1} - \vec{v}_{m/O_1})$$

Observateur:2

À t O_2 mesure: $\vec{v}_{m/O_2} \; et \; \vec{\mathcal{P}}_2 = m\vec{v}_{m/O_2}$

À t' O_2 mesure: $\vec{v}'_{m/O_2} \; et \; \vec{\mathcal{P}}'_2 = m\vec{v}'_{m/O_2}$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{\mathcal{P}}_{/O_2} = m(\vec{v}'_{m/O_2} - \vec{v}_{m/O_2})$$

$$\vec{v}_{m/O_1} = \vec{v}_{m/1} \qquad \vec{v}_{m/O_2} = \vec{v}_{m/2}$$

$$\Delta\vec{\mathcal{P}}_{/1} = m(\vec{v}'_{m/1} - \vec{v}_{m/1})$$

$$\Delta\vec{\mathcal{P}}_{/2} = m\left[(\vec{v}'_{m/2} - \vec{v}_{m/2})\right] = m\left[(\vec{v}'_{m/1} + \vec{v}'_{1/2}) - (\vec{v}_{m/1} + \vec{v}_{1/2})\right]$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$ Comme: $\vec{v}'_{2/1} = \vec{v}_{2/1} \; et \; \vec{v}'_{1/2} = \vec{v}_{1/2}$

$\Downarrow$

On obtient: $\Delta\vec{\mathcal{P}}_{/2} = m\left[(\vec{v}'_{m/2} - \vec{v}_{m/2})\right] = m\left[(\vec{v}'_{m/1} - \vec{v}_{m/1})\right] = \Delta\vec{\mathcal{P}}_{/1}$

$$\Delta\vec{\mathcal{P}}_{/2} = \Delta\vec{\mathcal{P}}_{/1}$$

Chaque observateur mesure une vitesse et une quantité de mouvement différente pour la même particule. Mais pour tous les observateurs Galiléens, l’accélération, sa variation de quantité de mouvement et donc la force appliquée à cette particule sont les même.

$$\vec{v}, \vec{\mathcal{P}}\ sont \neq; (\vec{a}, \vec{F}, \Delta\vec{\mathcal{P}})\ sont\ les\ meme$$

LOIS DE LA NATURE

Applications des lois de Newton:

Poids d'un objet au voisinage de la terre:

Le poids est la force exercée par la terre sur le corps, il s' écrit donc :

$$\vec{P} = m\vec{a}$$ **(2ème loi de Newton)**

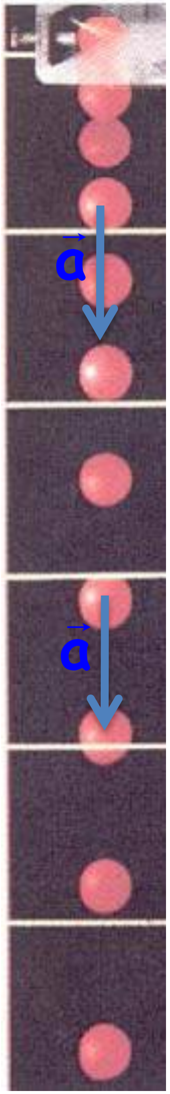
On réalise pour cela deux expériences:

1ère expérience :
Chute libre sans vitesse initiale

2ème expérience :
Chute avec vitesse initiale horizontale

1ère expérience :
Chute libre sans vitesse initiale

2ème expérience :
Chute avec vitesse initiale horizontale

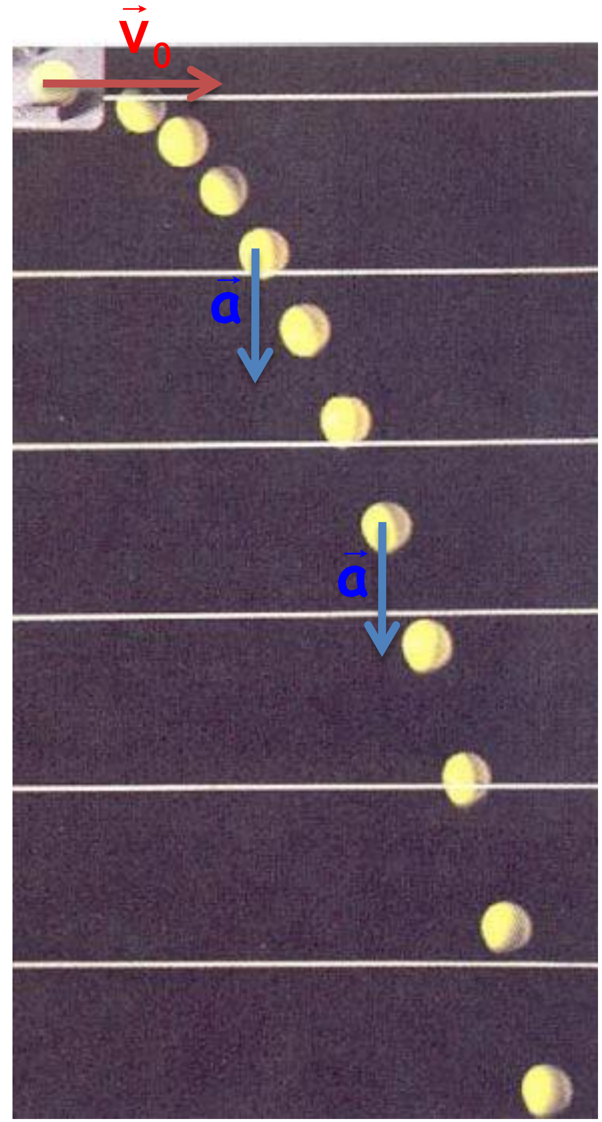


Après une étude cinématique des mouvements on constate que l'accélération est constante dans les deux cas en sens et direction.

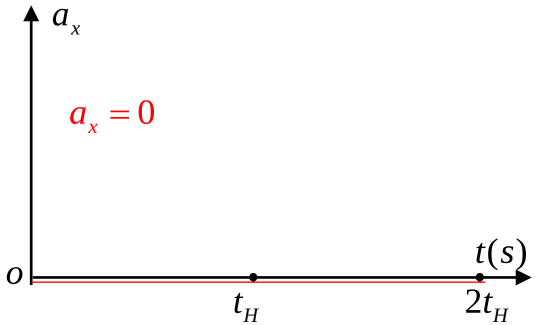
Cette accélération est connue sous le nom d'accélération de la pesanteur notée g.

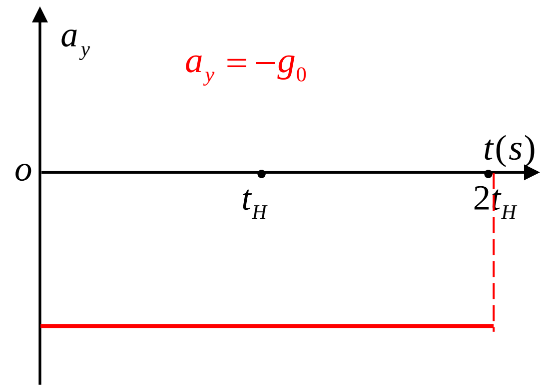
Exemple :
A Alger g_o = 9.80 m/s²
Au pôle nord g_o = 9.83 m/s²

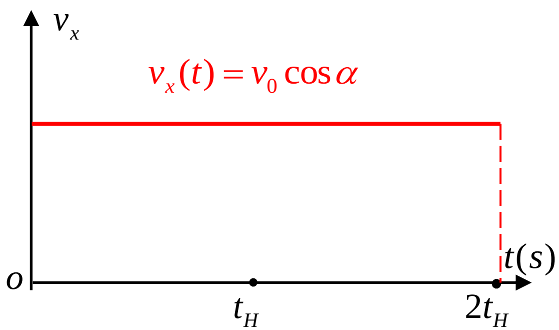
$$\vec{P} = m\vec{g}$$



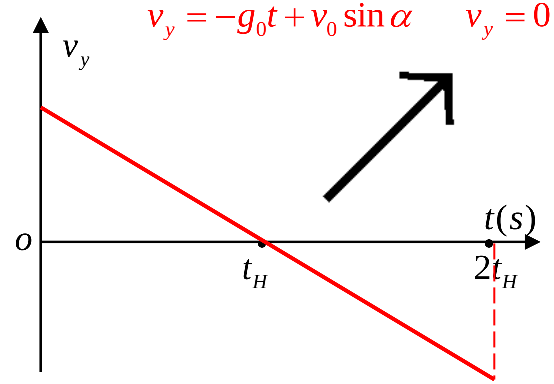
Mouvement d'un projectile au voisinage de la terre:







$v_y = -g_0 t + v_0 \sin\alpha \qquad v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad t_H = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g_0}$



$x(t) = v_0 t \cos\alpha$

$y(t) = -\dfrac{1}{2} g_0 t^2 + v_0 t \sin\alpha$

$$H = y(t_H) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g_0}$$

$$D = x(2t_H) = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\alpha$$

$$\boxed{y = -\frac{g_0}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\tan\alpha}$$

Mouvement d’un projectile au voisinage de la terre:

Mouvement horizontal: MRU

$$a_x = o$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

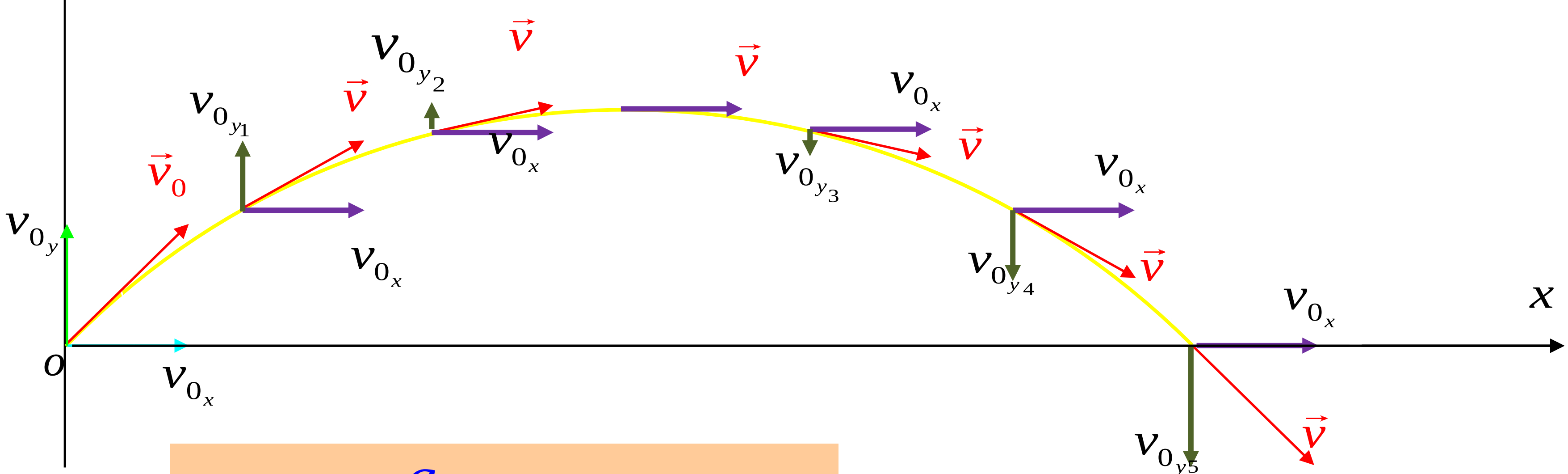
$$x(t) = v_0 t \cos\alpha$$

Mouvement vertical: MRUV

$$a_y = -g_0$$

$$v_y(t) = -g_0 t + v_0 \sin\alpha$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g_0 t^2 + v_0 t \sin\alpha$$

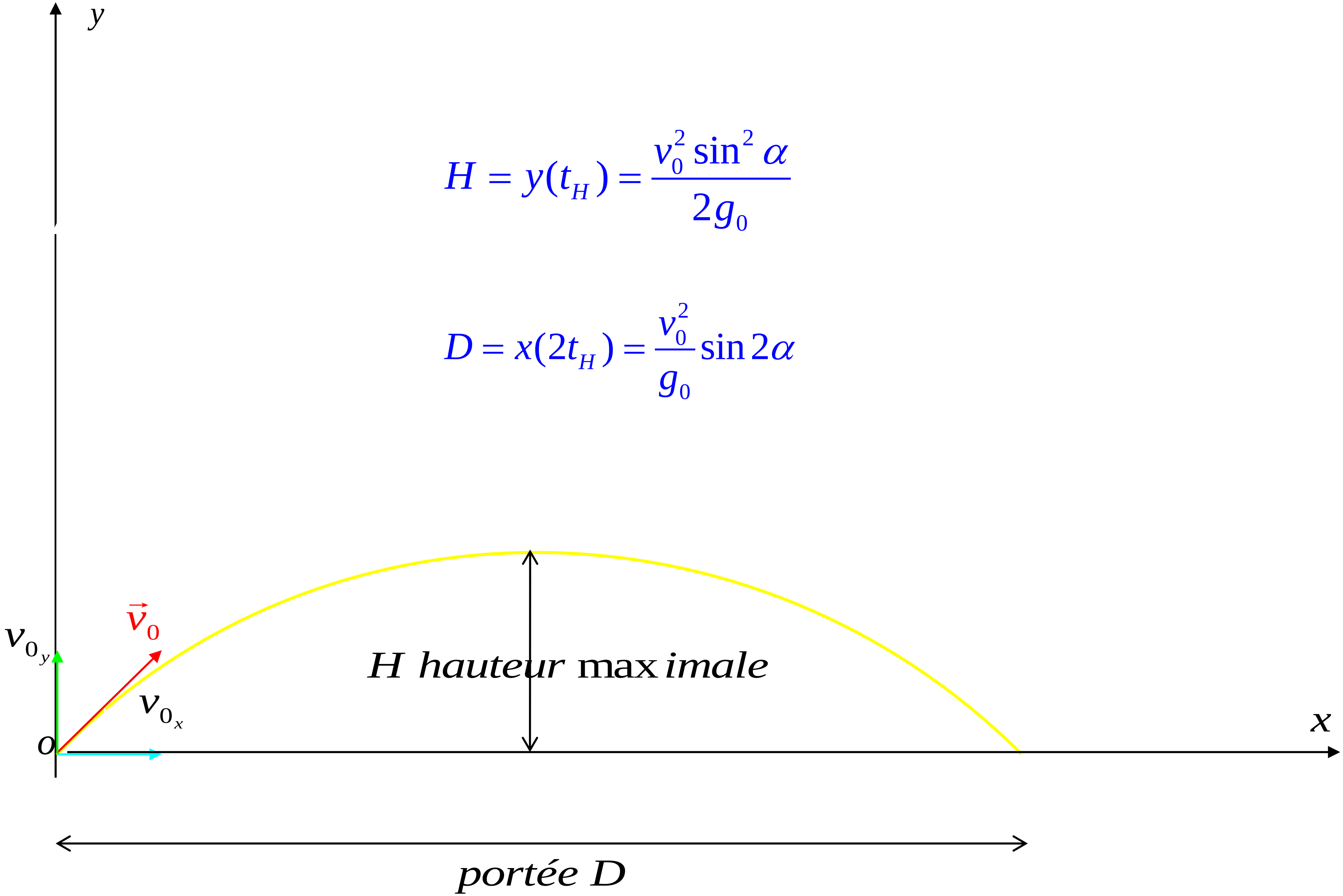


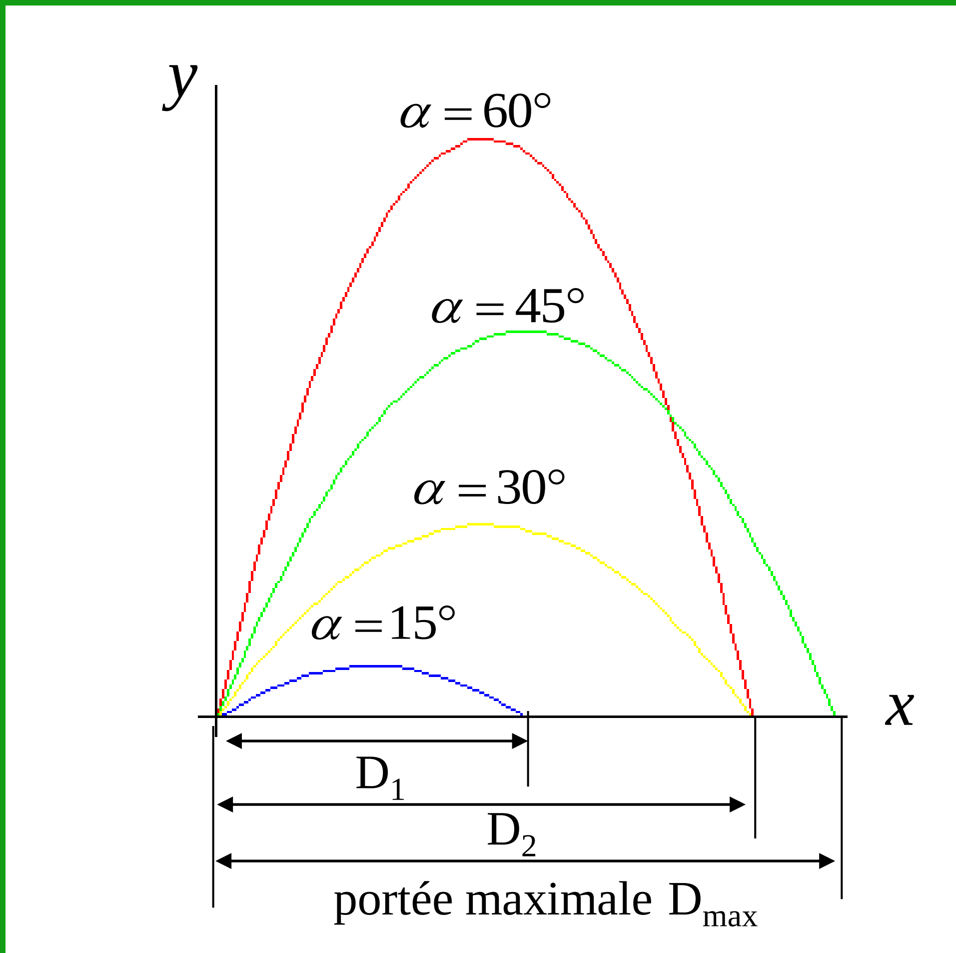
$$y = -\frac{g_0}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha$$

Équation de la trajectoire

$$H = y(t_H) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g_0}$$

$$D = x(2t_H) = \frac{v_0^2}{g_0} \sin 2\alpha$$





La portée D varie avec l'angle de tir α pour une même vitesse initiale v_0. Elle est maximale pour α=45°:

$$D_{max} = \frac{v_0^2}{g_0}$$

Loi de gravitation universelle:

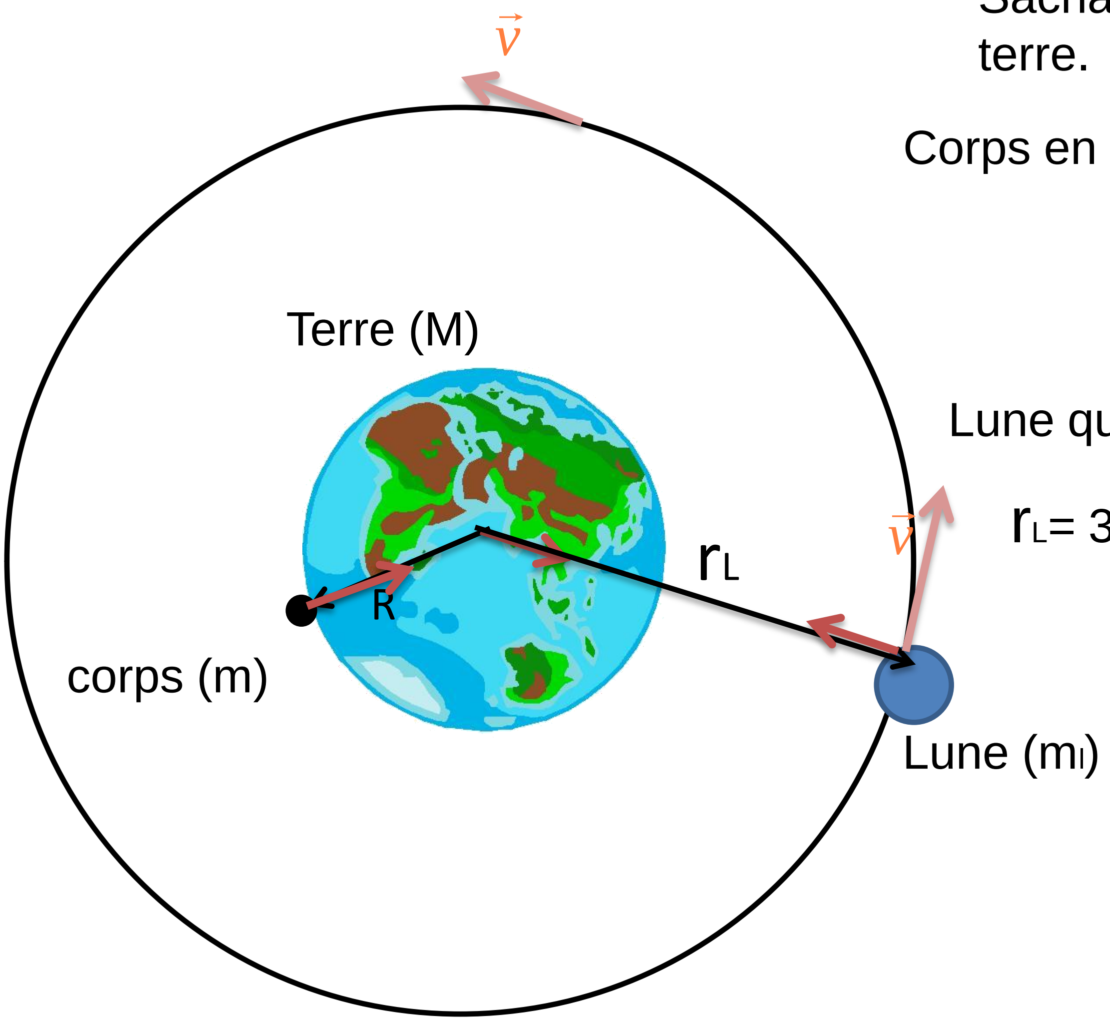
A partir d'hypothèses et d'observations il est possible de découvrir la loi de gravitation universelle (la démarche que nous suivrons est très approximativement celle suivie par Newton).

C'est Newton qui eut le premier l'idée d'étendre à la lune le phénomène de gravitation déjà étudié au voisinage de la terre: si c'est la force d'attraction entre une pomme et la terre qui fait tomber la pomme de l'arbre, ce doit être une force de même nature qui maintien la lune sur sa trajectoire circulaire; en effet, si elle ne tombait pas, c'est-à-dire si elle n'était pas attirait par la terre elle s'éloignerait le long de sa tangente à la trajectoire.

$$\vec{P} = m\vec{g} : \ poids\, de\, l'objet\, de\, masse\, m$$

$$\vec{F} = m_L \vec{a}_L : \ force\, appliquée\, à\, la\, lune$$

Loi de gravitation universelle:



Sachant que R = 6400 km: rayon de la terre.

Corps en chute libre au voisinage du sol:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Lune qui tourne autour de la terre :

r_L= 384 000 km donc: rayon de la lune.

$$\vec{F} = m_L\vec{a}_L$$

$$\frac{r_L}{R} = 60$$

Comme nous l'avons dit précédemment pour l'étude des planètes, on peut considérer comme bon repère d'inertie un repéré lié au soleil ou lié à la terre mais ne tournant pas avec elle.

La lune fait le tour de la terre au bout d'un temps t=T=27 jours et 1/3(mouvement circulaire uniforme), on obtient donc:

$$a_L = a_N = \frac{v^2}{r_L} = \frac{(\omega r_L)^2}{r_L} = \omega^2 r_L = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_L = 2{,}74\,10^{-3} m/s^2$$

La lune a un accélération inférieur à g_o=10:

$$\frac{g}{a_L} = 3600 = (60)^2 = \left(\frac{r_L}{R}\right)^2$$

En faisant le rapport des deux forces :

$$\frac{P}{F} = \frac{m}{m_L}\frac{g}{a_L}$$

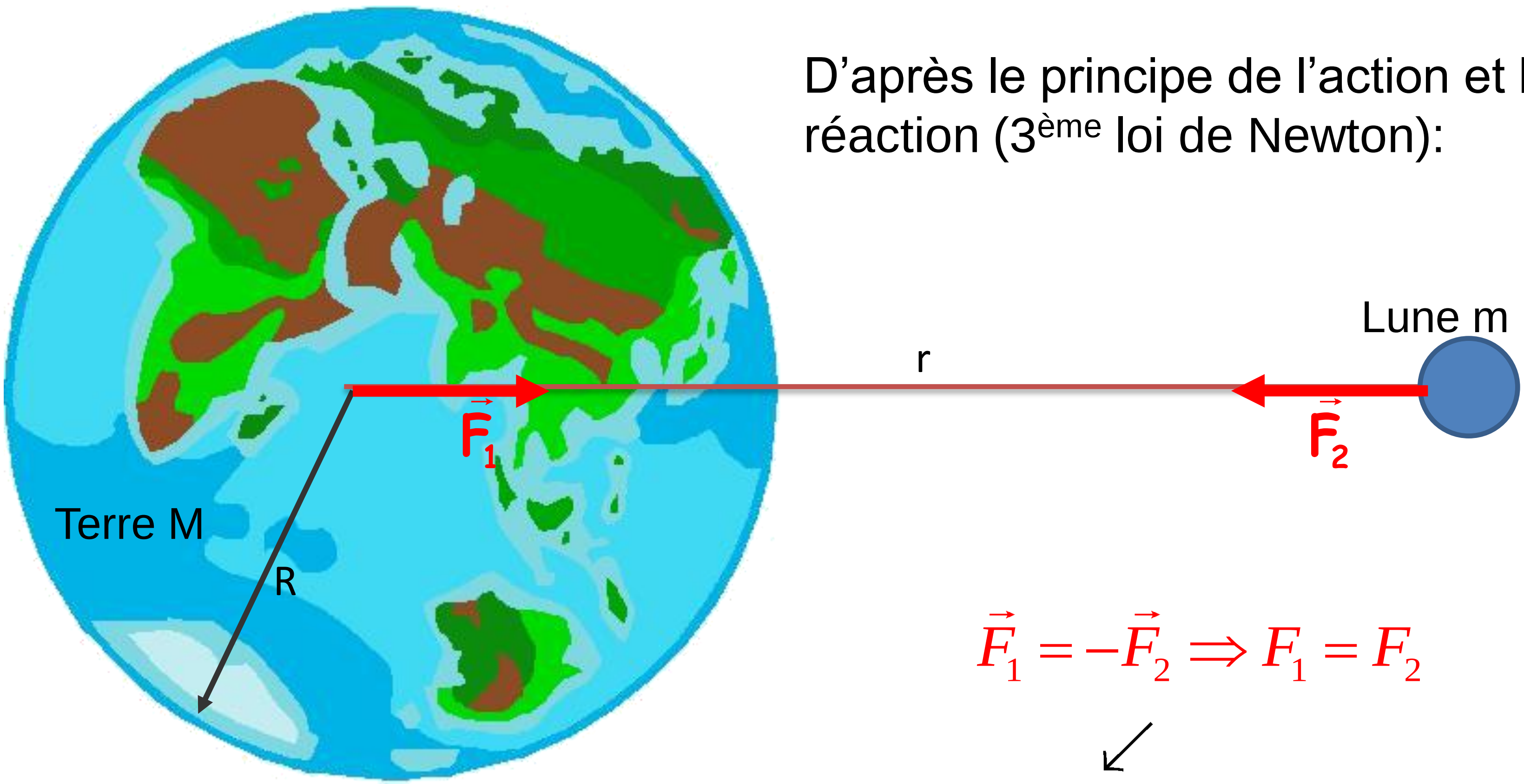
$$\frac{P}{F} = \frac{m}{m_L}\frac{g}{a_L} = \frac{m}{m_L}\left(\frac{r_L}{R}\right)^2$$

Les forces sont donc proportionnelles à la masse et inversement proportionnelles au carré du rayon :

$$F = F_2 = K_2 \frac{m_L}{r_L^2} \quad et \quad P = F_1 = K_1 \frac{M}{r^2}$$

$$avec : r_L = r$$

D'après le principe de l'action et la réaction (3ème loi de Newton):



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow F_1 = F_2$$

$$\swarrow$$

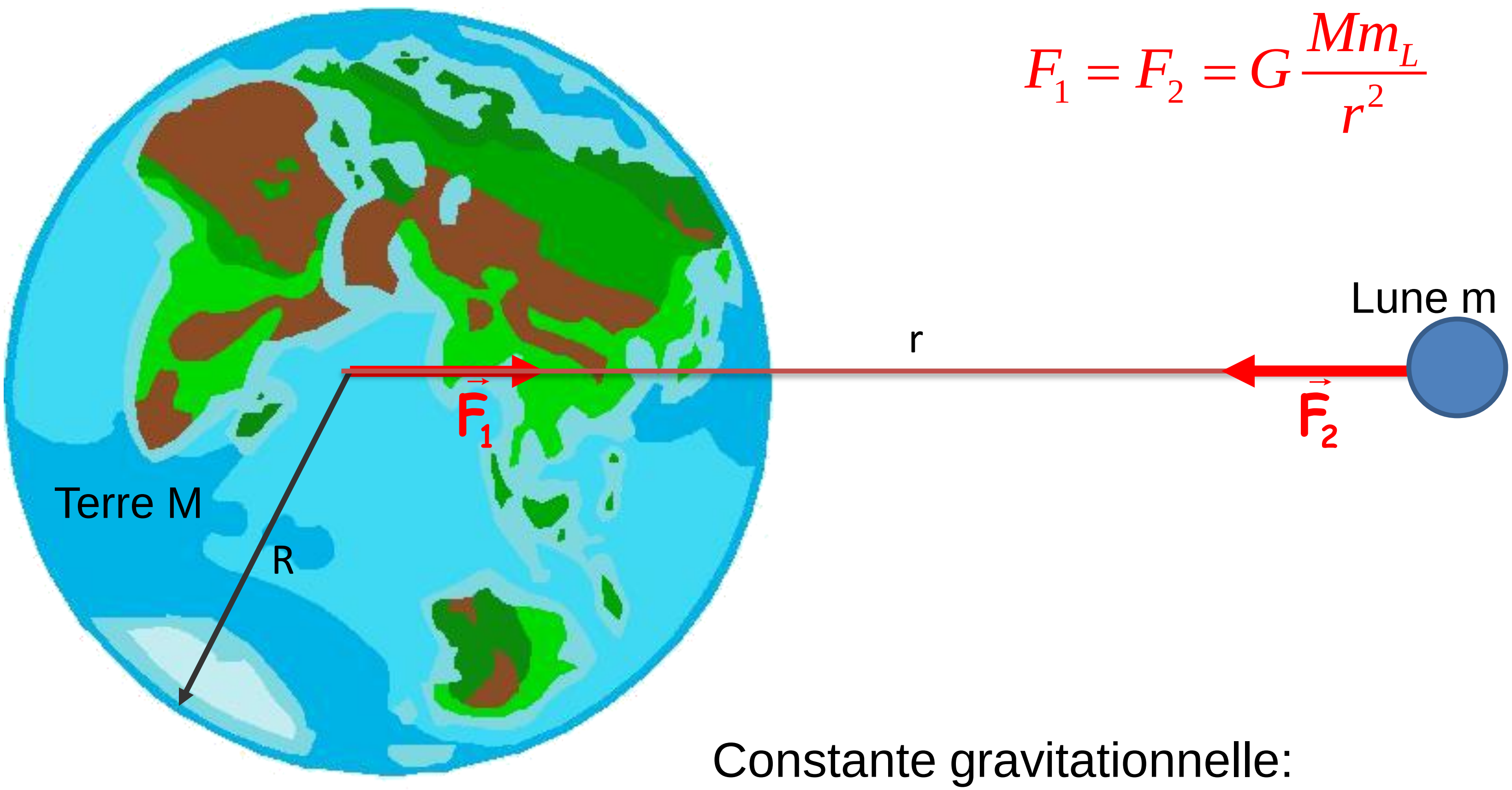
$$K_1 M = K_2 m_L$$

$$P = F_1 = K_1 \frac{M}{r^2}$$

$$K_1 M = K_2 m_L \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{K_2}{M} m_L = G_1 m_L \Rightarrow F_1 = G_1 m_L \frac{M}{r^2} \\ K_2 = \frac{K_1}{m_L} M = G_2 M \Rightarrow F_2 = G_2 M \frac{m_L}{r^2} \end{cases}$$

$$F = F_2 = K_2 \frac{m_L}{r_L^2}$$

$$F_1 = F_2 = G \frac{M m_L}{r^2}$$

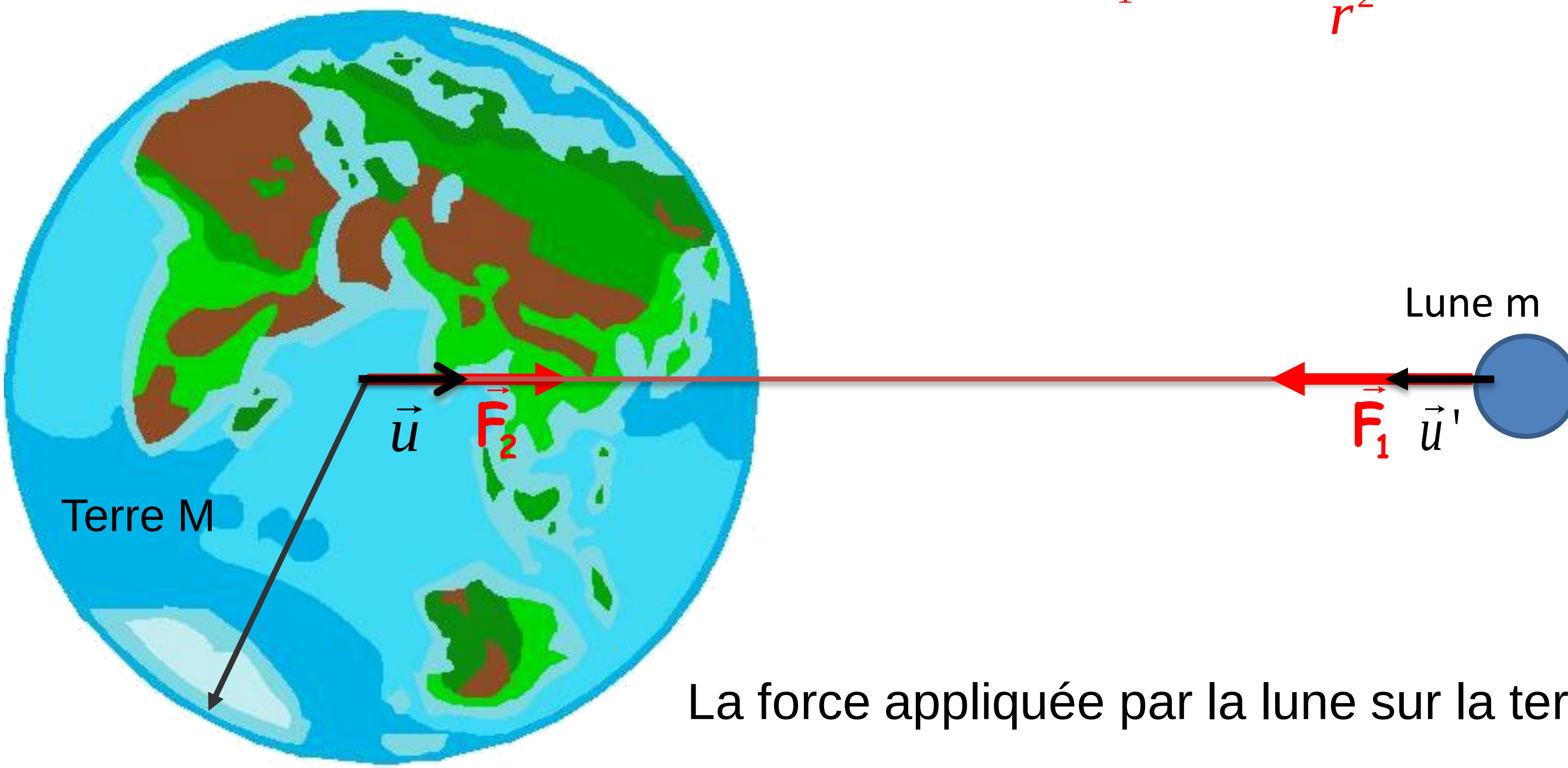


Constante gravitationnelle:

$$G = 6.67\,10^{-11}\ N.kg^{-2}.m^2$$

La force appliquée par la terre sur la lune est :

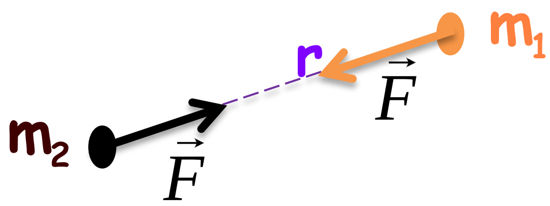
$$\vec{F}_1 = -G\frac{Mm_L}{r^2}\vec{u}$$



La force appliquée par la lune sur la terre est :

$$\vec{F}_2 = -G\frac{Mm_L}{r^2}\vec{u}\,'$$

En universalisant le phénomène de gravitation, Newton admit qu'entre deux particules matérielles de masse m_1 et m_2 placées à une distance r l'une de l'autre, s'exerce une force attractive d'intensité:



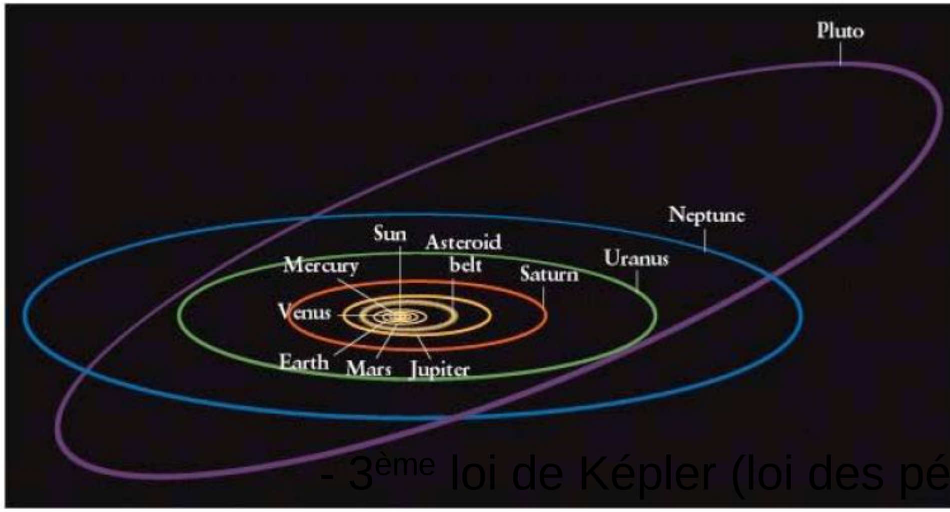
$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Ainsi fut établie la première loi fondamentale.

La validité de cette loi est confirmée de nos jours.
La définition F=ma et la loi de gravitation, permet de répondre aux deux objectifs que l'on attend de la dynamique: l'explication des phénomènes, et la prévision des mouvements.

- $3^{ème}$ loi de Képler (loi des périodes):

Les observations de Tycho et Brahé.



Johannes Kepler (1571-1630)

- $3^{ème}$ loi de Képler (loi des périodes):

Les observations de Tycho et Brahé, reprises par Képler, sur la rotation des planètes autour du soleil, avaient amené celui-ci à une loi expérimentale entre les période et leurs distance r par rapport au soleil.

$$\Rightarrow \qquad \frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{r_1^{\,3}}{r_2^{\,3}}$$

Cette loi ,incompréhensible à l’époque de Képler.

Si une planète de masse m et de période T, se trouve sur une orbite circulaire de rayon r, elle a une accélération a. C’est donc qu’elle est soumise à un force F=ma.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad et \quad a = a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$F = G\frac{m_s m}{r^2} = mg = ma = ma_N = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

$$G\frac{m_s m}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r \Rightarrow \boxed{\frac{Gm_s}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}}$$

Pour la planète 1: $\Rightarrow \quad \frac{Gm_s}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{T_1^2}$

Pour la planète 2: $\Rightarrow \quad \frac{Gm_s}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{T_2^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

- Satellite « fixe » ou géostationnaire :

Pour les retransmission de télécommunications nous désirons avoir des Satellites immobiles par rapport au sol.

Pour l'étude du mouvement d'un satellite autour de la terre, un référentiel attaché au centre de la terre mais ne tournant pas avec elle peut être pris comme référentiel d'inertie.

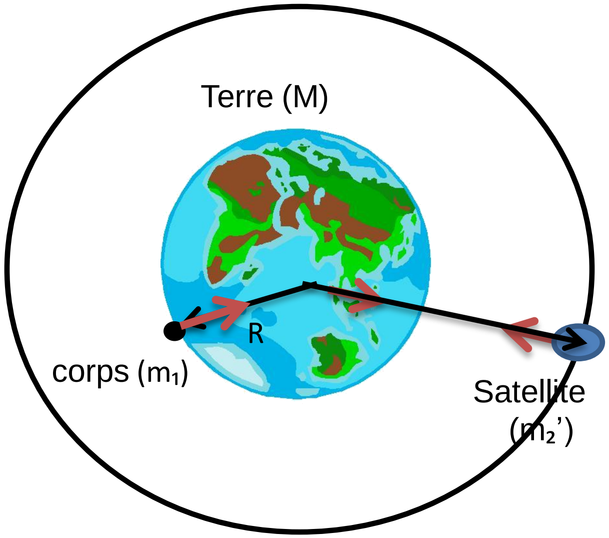
Un satellite géostationnaire décrit une orbite circulaire à une distance r du centre de la terre et doit effectuer un tour en 24 h.

La force qui le maintien sur son orbite ou le fait tomber vers la terre, est son poids.

$$P = \frac{GMm_s}{r^2}$$

Avec: M masse de la terre
m masse du satellite

$$r = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 4.2710^7\, m \;\; et \quad v = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2} = 3{,}0810^3\, m/s \;\; avec\; r = R + h$$



Corps au niveau du sol:

$$F_1 = G\frac{Mm_1}{R^2} = m_1 g_0$$

Satellite à une hauteur h du niveau du sol:

$$F_2 = G\frac{Mm_2}{r^2} = m_2 g(h)$$

En faisant le rapport des deux forces :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{G\dfrac{Mm_2}{r^2}}{G\dfrac{Mm_1}{R_T^2}} = \frac{m_2 g}{m_1 g_0} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{r^2}} = \frac{\mathbf{g(\ h)}}{\mathbf{g_0}}$$

$$\boxed{g(\ h) = \frac{R_T^2}{(\ R_T + h)^2}\, g_0}$$

Forces de contact

C’est la force exercée entre deux corps qui sont en contact l’un avec l’autre. Nous allons étudier ces forces à travers certains exemples.

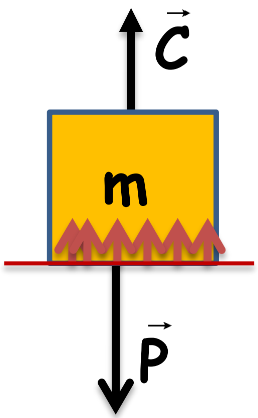
Le mot **contact** doit être pris au sens macroscopique du terme: la force de contacte est en réalité la résultantes des **forces électriques** qu’un corps applique sur l’autre.

Lorsque les atomes et molécules de deux corps qui se rapprochent trop, ils se repoussent avec une très grande force.

Ces interactions entre molécules voisines étant extrêmement complexes, aucune loi macroscopique ne peut être déduite théoriquement des lois de forces fondamentales.

La seule façon d’étudier les forces de contactes est d’étudier expérimentalement les mouvements des corps sur lesquels elles s’exercent.

Exemple 1: un objet de masse m au repos sur un plan horizontal



La relation fondamentale de la dynamique donne:

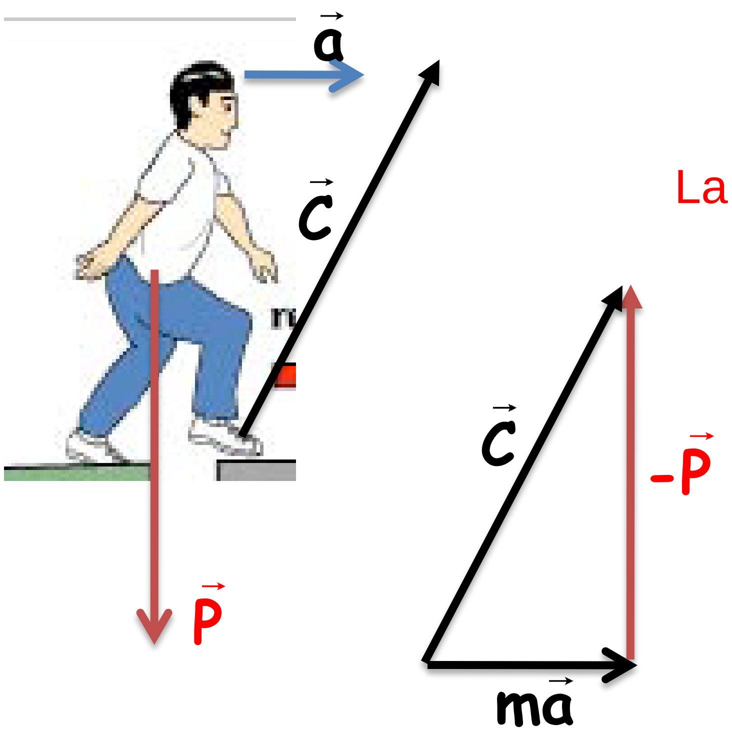
A l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{C} = 0 \Rightarrow \vec{C} = -\vec{P}$$

L'autre force n'est pas connue: forces globales que les **molécules du sol en contact avec l'objet(m)** appliquent sur lui, soit $\vec{C}$

En effet, le principe de **l'action et la réaction** ne peut s'appliquer qu'entre deux forces **de même nature physique**.

Exemple 2: Démarrage d'une course sur un plan horizontal



En mouvement on écrit :

La relation fondamentale de la dynamique donne:

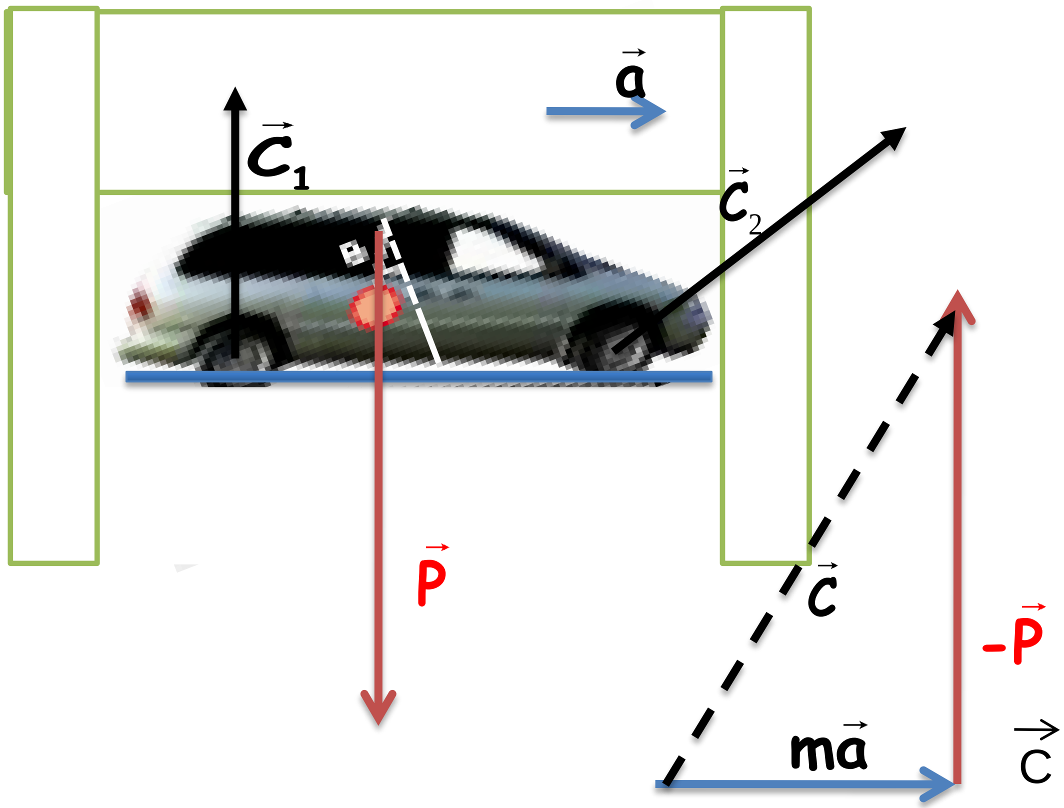
$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{C} = m\vec{a} - \vec{P}$$

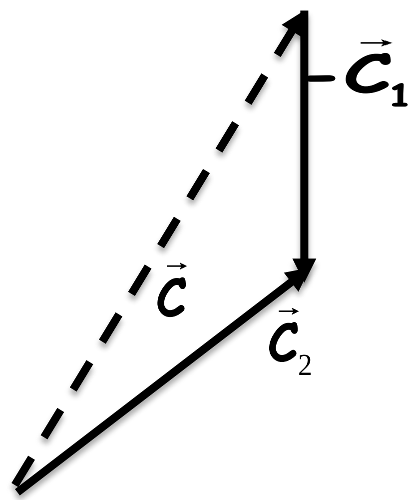
Exemple 3: Démarrage d'une voiture ou moto sur un plan horizontal

En mouvement on écrit :

La relation fondamentale de la dynamique donne:

$$\vec{P}+\vec{C}_1+\vec{C}_2=m\vec{a}\Rightarrow\vec{C}_1+\vec{C}_2=\vec{C}=m\vec{a}-\vec{P}$$



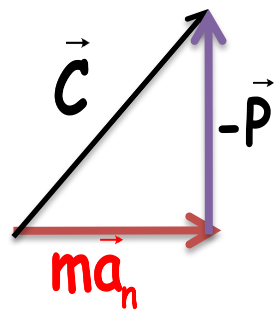


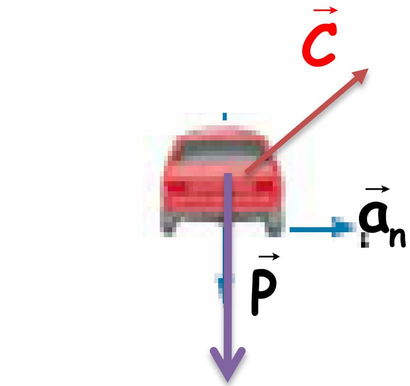
$\vec{C}$ (ou $\vec{C}_2$) est appelée force motrice

Exemple 4: Voiture dans un virage avec une <u>vitesse constante</u>:

relation fondamentale de la dynamique:

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{C} = m\vec{a} - \vec{P}$$





$$\vec{v} = cte \Rightarrow \begin{cases} a_T = 0 \\ a_N = v^2 / R \end{cases}$$

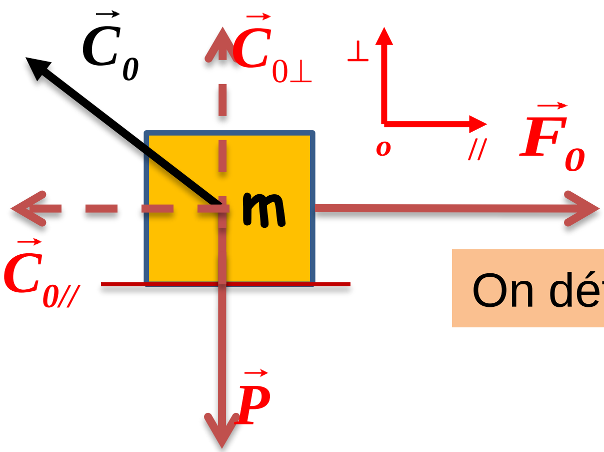
Forces de frottements:

On étudie ces forces à travers certains exemples:

***Exemple 1: corps de masse m sur un plan horizontal au repos*:**

On tire un corps de masse m, au repos, avec une force $\vec{F}_0$ sans le déplacer

La relation fondamentale de la dynamique donne:



$$\vec{P} + \vec{F}_0 + \vec{C}_0 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} // : F_0 - C_{0//} = 0 \\ \perp : C_{0\perp} - P = 0 \end{cases}$$

On définit le coefficient de frottement statique par:

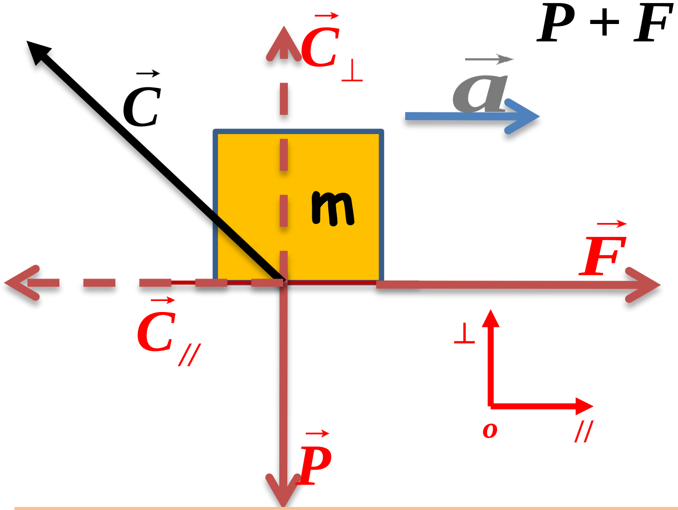
$$\mu_s = \frac{\left|\vec{C}_{0//}\right|}{\left|\vec{C}_{0\perp}\right|} \Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{F_0}{P}}$$

Donc il faut une force $F > F_0 = \mu_s P$ pour qu'il y ait mouvement.

Exemple 2: corps de masse m sur un plan horizontal en mouvement :

Soit un corps en mouvement sur lequel on applique une force $\vec{F}$

La relation fondamentale de la dynamique donne:



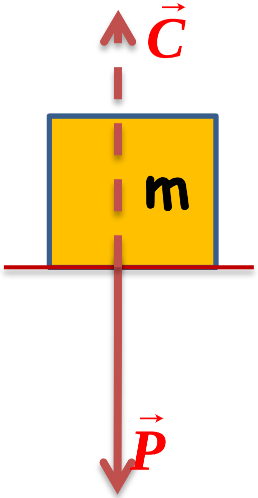
$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{C} = m\vec{a}$$

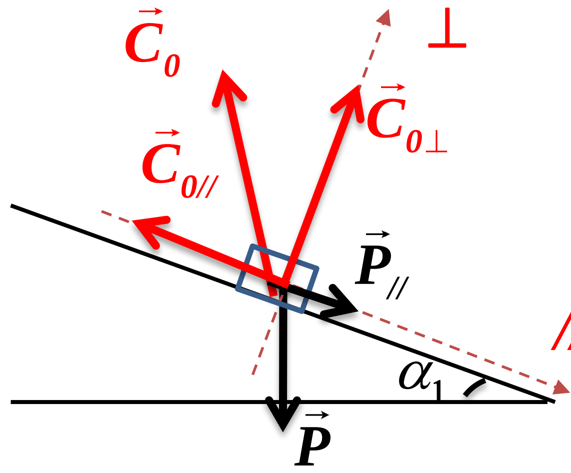
$$\begin{cases} // : F - C_{//} = ma \\ \perp : C_\perp - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{//} = F - ma \\ C_\perp = P \end{cases}$$

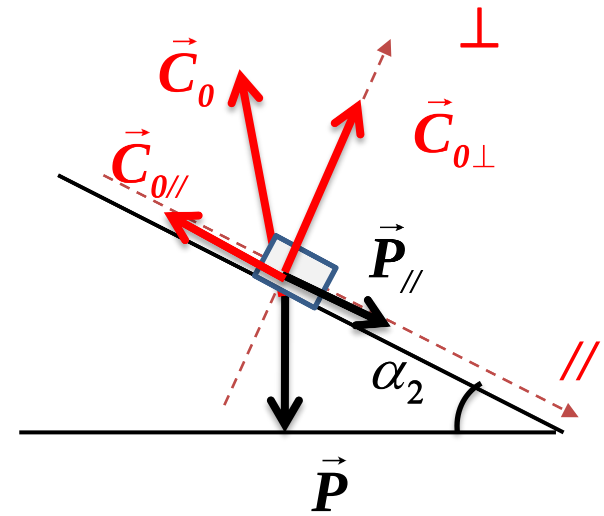
On définit le coefficient de frottement dynamique (ou de glissements) par:

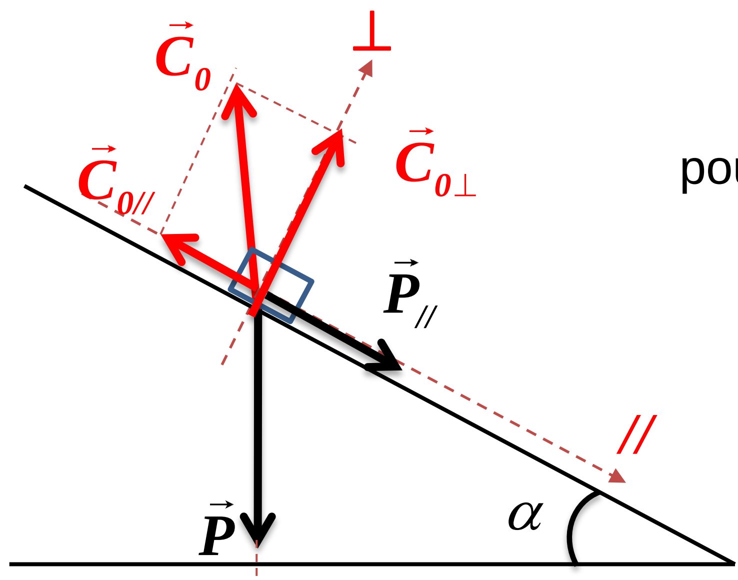
$$\mu_d = \frac{\left|\vec{C}_{//}\right|}{\left|\vec{C}_\perp\right|} \Rightarrow \boxed{\mu_d = \frac{F - ma}{P}}$$

corps de masse m sur un plan incliné en mouvement sous l'action de son poids



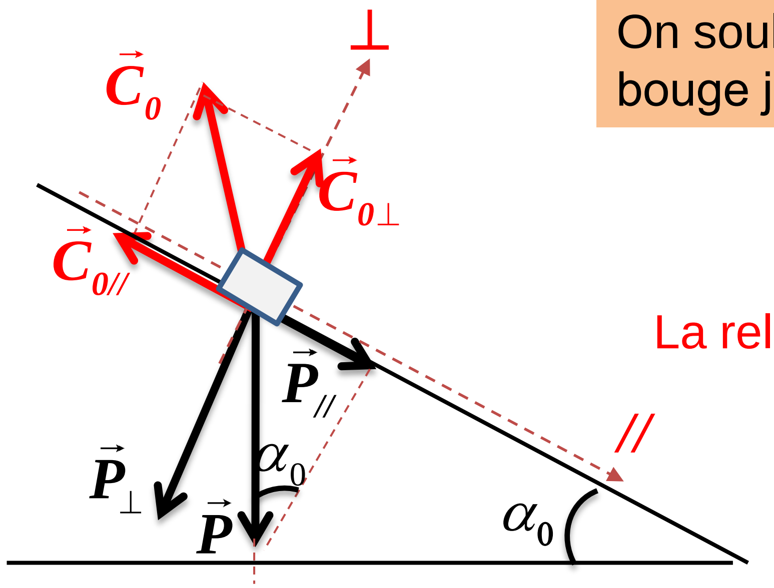






pour $\alpha > \alpha_0$

Exemple 3: corps de masse m sur un plan incliné au repos:



On soulève le plan incliné sans que le corps ne bouge jusqu'à un angle limite α_0

La relation fondamentale de la dynamique donne:

$$\vec{P} + \vec{C}_0 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} // : P_{//} - C_{0//} = 0 \\ \perp : C_{0\perp} - P_{\perp} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{//} = C_{0//} \\ C_{0\perp} = P_{\perp} \end{cases}$$

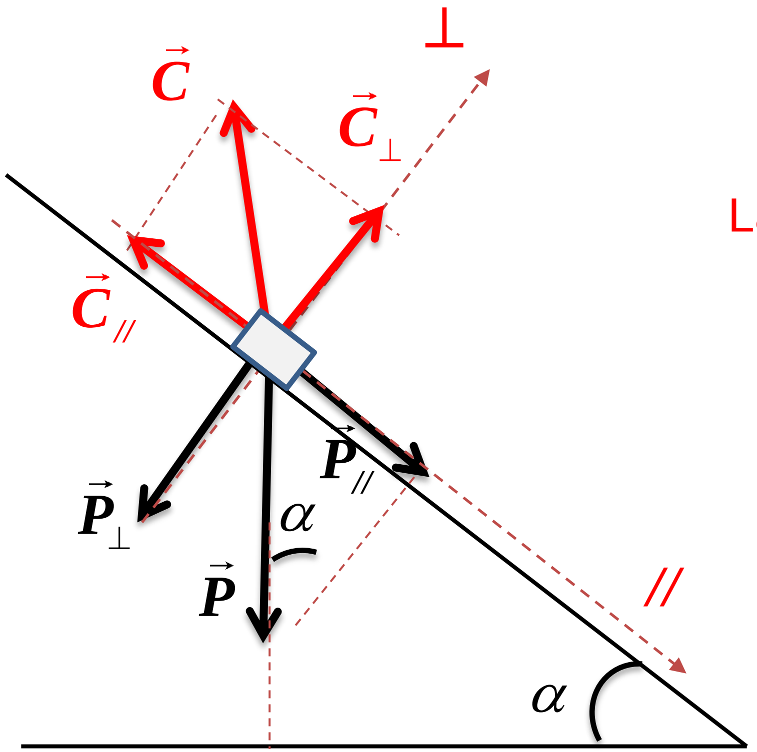
$$\begin{cases} P\sin\alpha_0 = C_{0//} \\ P\cos\alpha_0 = C_{0\perp} \end{cases}$$

On définit le coefficient de frottement statique par:

$$\mu_s = \frac{\left|\vec{C}_{0//}\right|}{\left|\vec{C}_{0\perp}\right|} \Rightarrow \mu_s = \frac{P_{//}}{P_{\perp}} = \frac{mg\sin\alpha_0}{mg\cos\alpha_0} \Rightarrow \boxed{\mu_s = tg\alpha_0}$$

Exemple 4: corps de masse m sur un plan incliné en mouvement:

Si on prend un angle α supérieur à α_o il a y mouvement



La relation fondamentale de la dynamique donne:

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} // : P_{//} - C_{//} = m\bar{a} \\ \perp : C_\perp - P_\perp = 0 \end{cases}$$

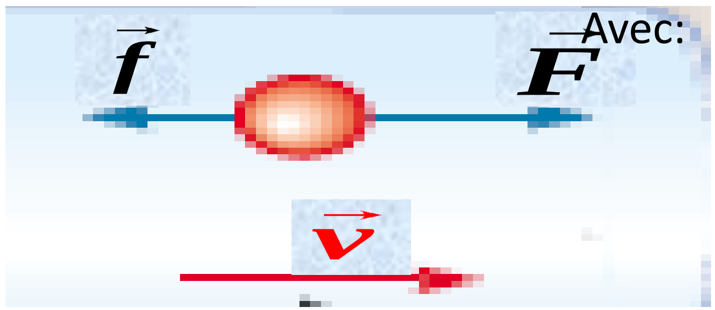
$$\begin{cases} // : P\sin\alpha - C_{//} = m\bar{a} \\ \perp : C_\perp - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

On définit le coefficient de frottement de glissements par:

$$\mu_d = \frac{|\vec{C}_{//}|}{|\vec{C}_\perp|} \Rightarrow \boxed{\mu_d = \frac{|g_0 \sin\alpha - a|}{g_0 \cos\alpha}}$$

Exemple 5: corps de masse m en mouvement dans un fluide

Quand un corps se déplace dans un fluide avec une petite vitesse, il est soumis à une force de frottement proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -k\vec{v}$



La relation fondamentale de la dynamique donne:

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a} \qquad \left|\vec{F}\right| = F \ \text{ et } \ \left|\vec{f}\right| = f = kv$$

En projetant dans le sens du mouvement on a :

$$F - f = ma \qquad \text{Avec:} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

On obtient : $$F - kv = m\frac{dv}{dt}$$

Cette relation s'écrit sous la forme :

$$m\frac{dv}{dt}+kv=F \Rightarrow \frac{dv}{dt}+v\frac{k}{m}=\frac{F}{m} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=\frac{F}{m}}$$ Avec: $\boxed{\tau=\frac{m}{k}}$

Équation différentielle du premier ordre avec second membre , admet pour solution :

$$\boxed{v(t)=v_p(t)+v_{s.s.m}(t)}$$

Avec $v_p(t)$ est la solution particulière telle que v est constante donc $\frac{dv}{dt}=0$

$$kv_p=F \Rightarrow v_p(t)=\frac{F}{k}$$

et $v_{S.S.m}(t)$ est la solution sans second membre telle que $F=0$

$$m\frac{dv}{dt}+kv=0 \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt \Rightarrow \ln v=-\frac{k}{m}t+C^{te} \Rightarrow v_{s.s.m}(t)=Ae^{-\frac{k}{m}t}=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Et enfin : $$v(t)=\frac{F}{k}+Ae^{-\frac{k}{m}t}$$

En prenant comme conditions aux limites t = 0 s , v(0) =0 m/s

$$\Rightarrow A=-\frac{F}{k}$$

La vitesse en fonction du temps s’écrit comme:

$$\boxed{v(t)=\frac{F}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)=v_l\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

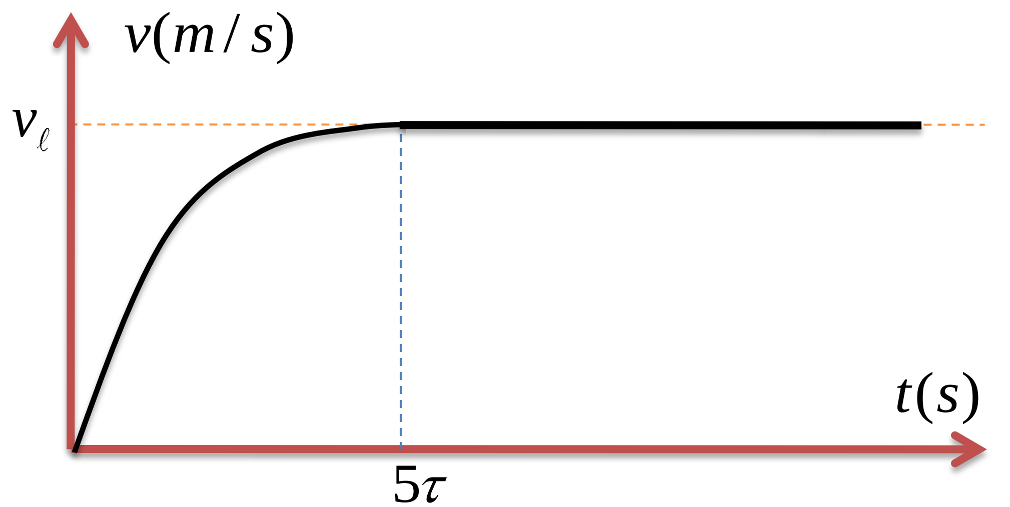
$$avec : v_\ell \ vitesse \lim ite.$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$v(t) = v_\ell \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$avec : v_\ell(t) = \frac{F}{k} \; et \; \tau = \frac{m}{k}$$

$$t = \tau \rightarrow v(t) = 0,66 v_\ell$$
$$t = 2\tau \rightarrow v(t) = 0,86 v_\ell$$
$$t = 3\tau \rightarrow v(t) = 0,95 v_\ell$$
$$t = 5\tau \rightarrow v(t) = 0,99 v_\ell$$



Quand un corps se déplace dans un fluide visqueux à faible vitesse, sous l'action d'une force $\vec{F}$, résultante des forces appliquées.

Le corps est soumit à une accélération donnée par: $ma = F - kv$

En supposant $\vec{P}$ constant, on voit qu'au fur et à mesure qu'augmente la vitesse, la force de frottement augmente, jusqu'à ce qu'elle s'oppose à la force $\vec{F}$.

L'accélération est alors nulle: on obtient ce qu'on appelle la vitesse limite; $v_\ell(t) = F/k$

$$\boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} = F - kv \Rightarrow -\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{k}}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} = v - \frac{F}{k} \Rightarrow \frac{dv}{v - \frac{F}{k}} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v - \frac{F}{k}} = \int_{t_0}^{t} -\frac{k}{m}dt$$

$$\grave{a}\ t = t_0 = 0 \Rightarrow v = v_0 = 0 \Rightarrow \log_e\left(\frac{v - \frac{F}{k}}{-\frac{F}{k}}\right) = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \left(\frac{v - \frac{F}{k}}{-\frac{F}{k}}\right) = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow \left(\frac{v - \frac{F}{k}}{-\frac{F}{k}}\right) = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v(t) = v_\ell\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{F}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) avec\ \tau = \frac{m}{k}$$

Forces élastiques:

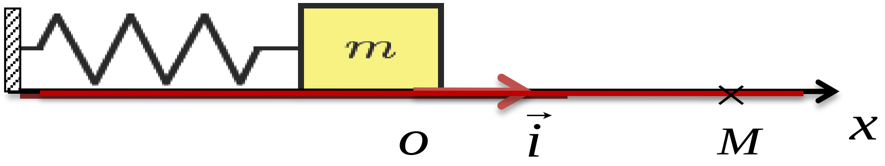
Mouvement rectiligne sinusoïdal

Un des mouvement les plus courant rencontré dans la nature est le mouvement oscillatoire ou périodique.

Il peut s'agir aussi bien de l'oscillation d'un pendule que les vibration de l'extrémité d'un diapason, des vibration des atomes dans un solide que des oscillation des électrons dans une antenne émettrice

Dans tous les mouvements oscillatoires le plus important est le mouvement oscillatoire sinusoïdal car il constitue une bonne représentation de beaucoup de phénomènes réels d'oscillation.

L'étude cinématique du mouvement rectiligne sinusoïdal a été faite au chapitre précédant.



Dans ce type de mouvement sinusoïdal le vecteur position du point M s'écrit:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} = A\sin(\phi)\vec{i} = A\sin(\omega t + \varphi)\vec{i}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \textit{est la période}$$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est la période $\quad A$: amplitude du mouvement $\quad \phi$: phase du mouvement

φ : phase à l'origine du mouvement

Position: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

Vitesse : $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

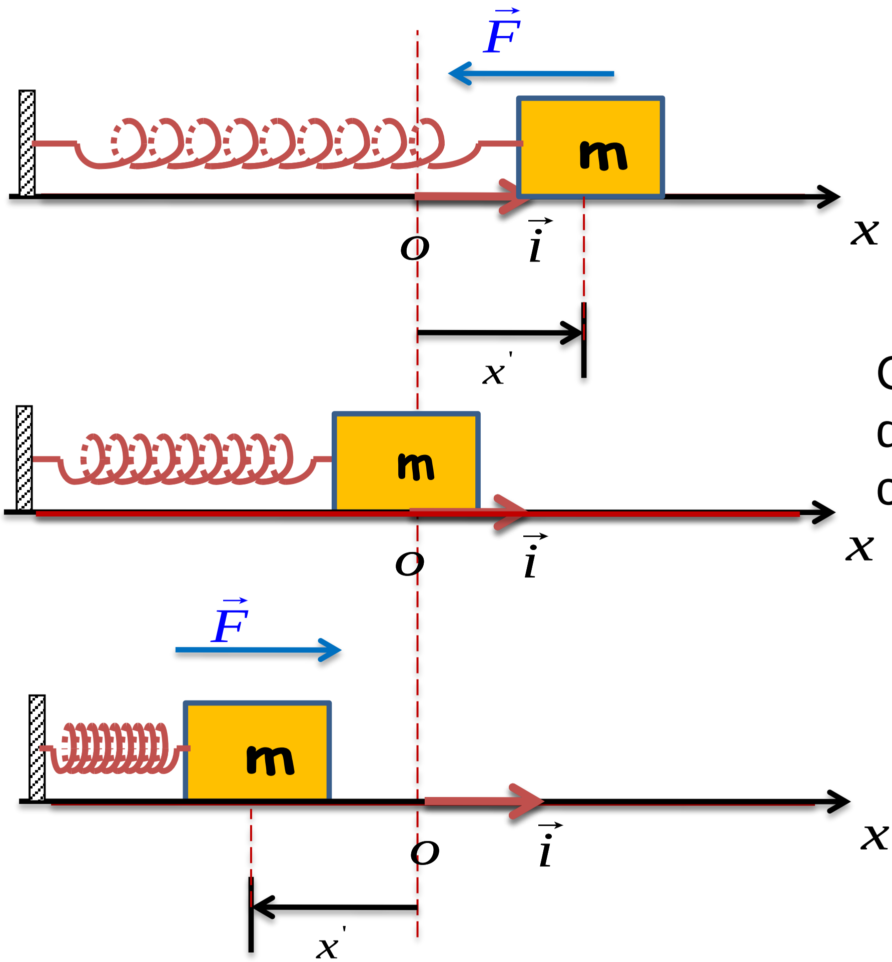
Accélération : $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$

On constate que: $\boxed{a(t) = -\omega^2 x(t)}$

Ou encore : $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$

C'EST UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE SANS SECOND MEMBRE

Interprétation dynamique:



Si m est la masse du corps animé du mouvement rectiligne sinusoïdal elle est soumise à une force:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 x\vec{i}$$

Cette force est proportionnelle au déplacement x, elle tend à ramener le corps au point O: On l'appelle force de rappel, ou force élastique

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 x\vec{i} = -kx\vec{i}$$

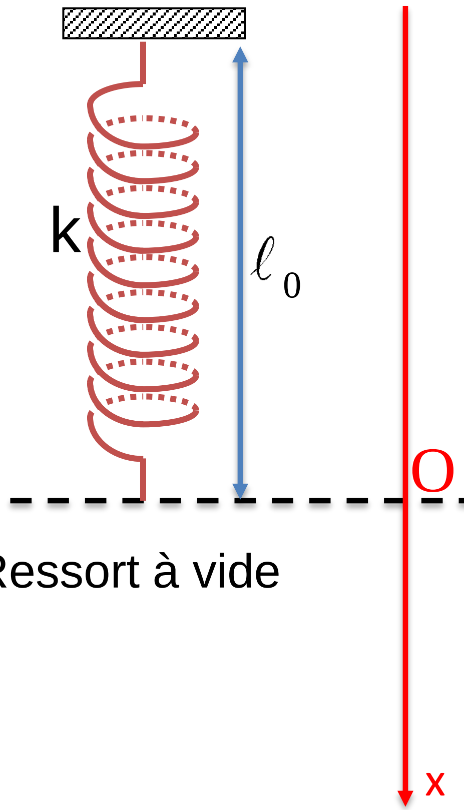
$$\boxed{m\omega^2 = k}$$

K est appelé constante élastique ou raideur du ressort

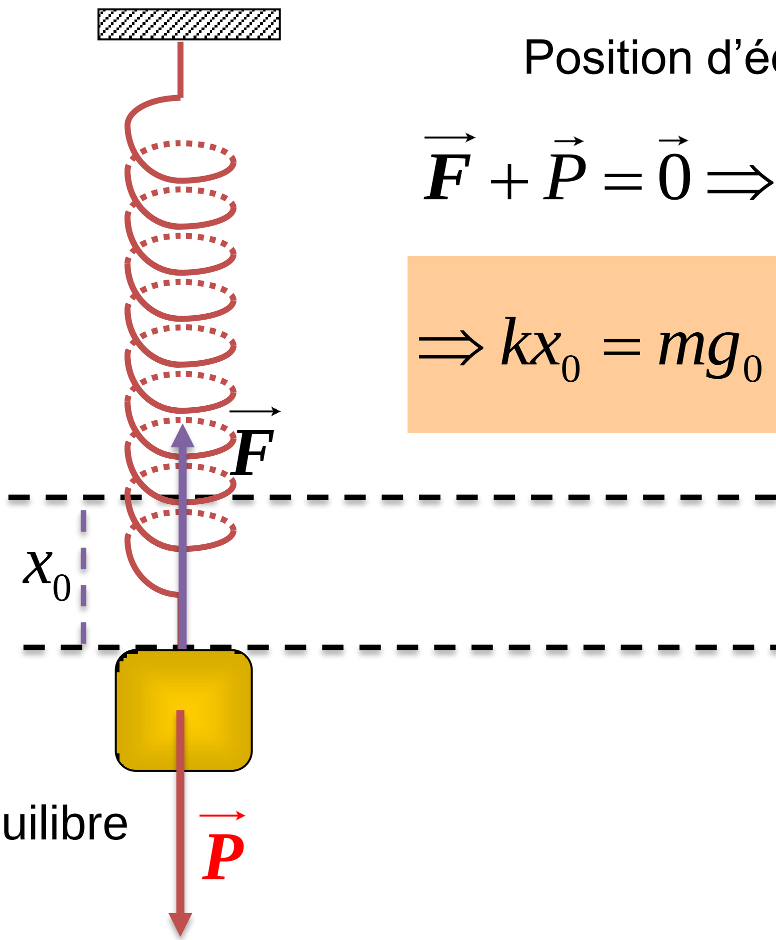
Dans le mouvement sinusoïdal, la force est proportionnelle au déplacement $\vec{r}$ mesuré par rapport à l'origine O et lui est opposée; elle est toujours dirigée vers l'origine et s'annule pour cette position x=0.

Mouvement d’un corps suspendu à un ressort

On accroche une masse m



Ressort à vide



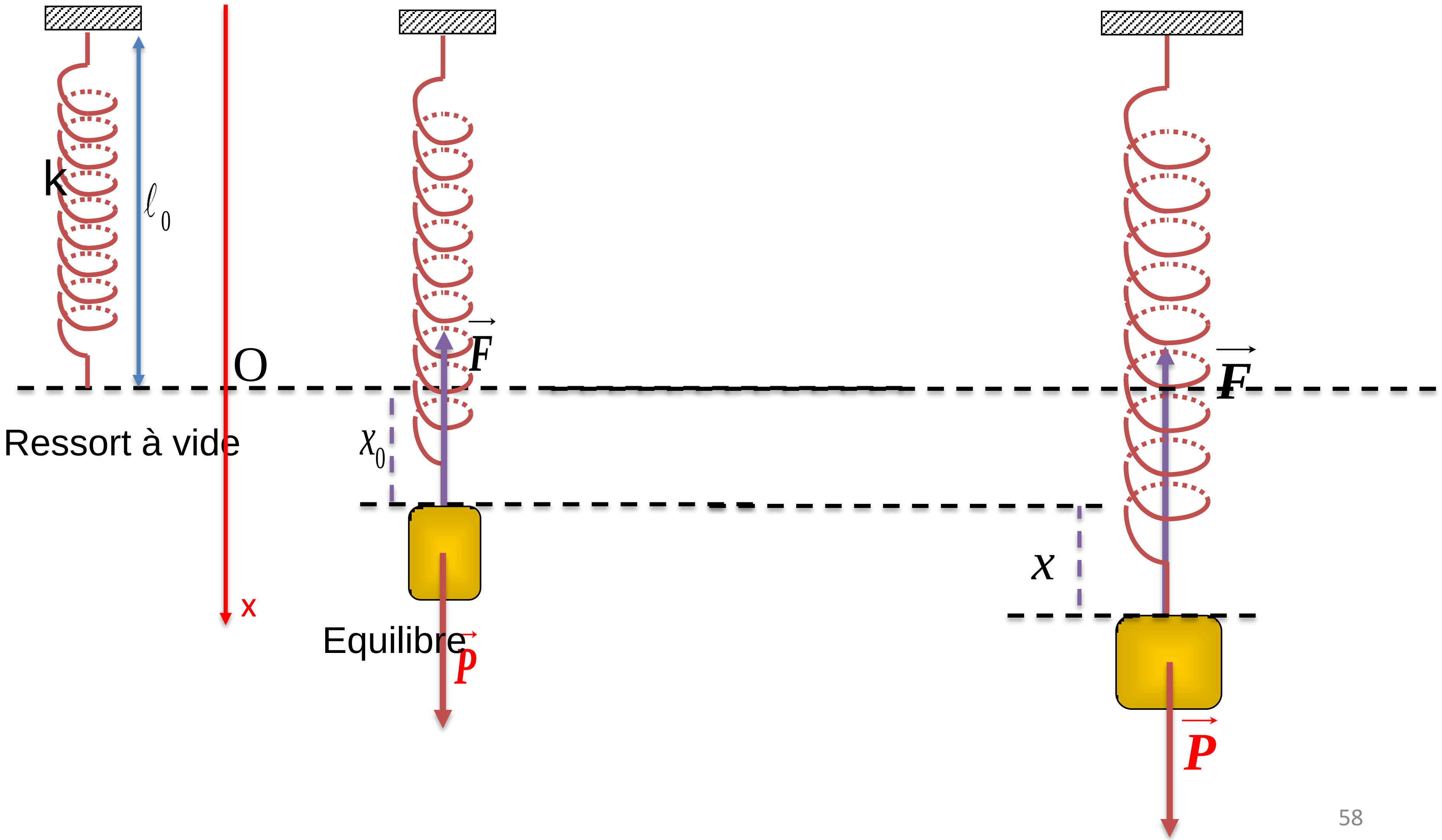
Equilibre

Position d’équilibre :

$$\vec{F}+\vec{P}=\vec{0}\Rightarrow P-F=0$$

$$\boxed{\Rightarrow kx_0=mg_0\Rightarrow x_0=\frac{mg_0}{k}}$$

On étire la masse m de x et on l'abondonne sans vitesse initiale, il y a mouvement du corps suspendu



En mouvement :

La relation fondamentale de la dynamique donne:

$$\vec{F} + \vec{P} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad P - F = ma$$

$$-kx = ma \quad \Leftarrow \quad mg_0 - k(x + x_0) = ma$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\boxed{a = -\omega^2 x}$$

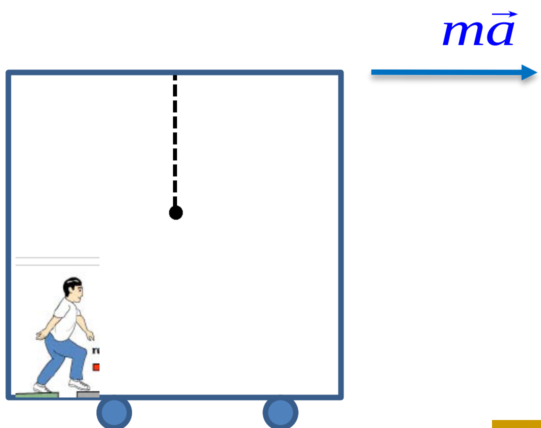
C'est donc un mouvement sinusoïdal

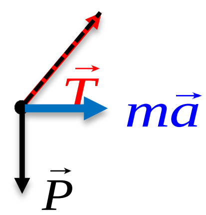
Forces d'inertie ou pseudo-force:

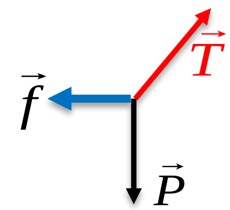
Exemple: pendule dans un véhicule.

Un observateur lié au véhicule dira que le pendule est en équilibre dans son système et il peut écrire : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Il doit ajouter aux force $\vec{F}$ *et* $\vec{T}$ une force d'inertie: $\boxed{\vec{f} = -m\vec{a}}$







$$\boxed{\vec{P} + \vec{T} - m\vec{a} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = \vec{0}}$$

Un observateur lié au sol écrirait: $\boxed{\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}}$

En conclusion sur plusieurs exemples comme celui-ci, il est inutile d'introduire les force d'inertie. On retrouve les mêmes résultat. Il est préférable d'écrire la relation fondamentale de la dynamique dans un repère galiléen.

Moment cinétique

Mouvement des planètes-Moment cinétique

Quelques dizaines d’années avant la naissance de la dynamique, Képler, partant les observations de Tycho et Brahé, avait établi les lois qui rendaient compte des mouvement des planètes autour du soleil. C’est la 3°loi de Képler sur les périodes.

-chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le soleil occupe l’un des foyers. **1°loi de Képler**

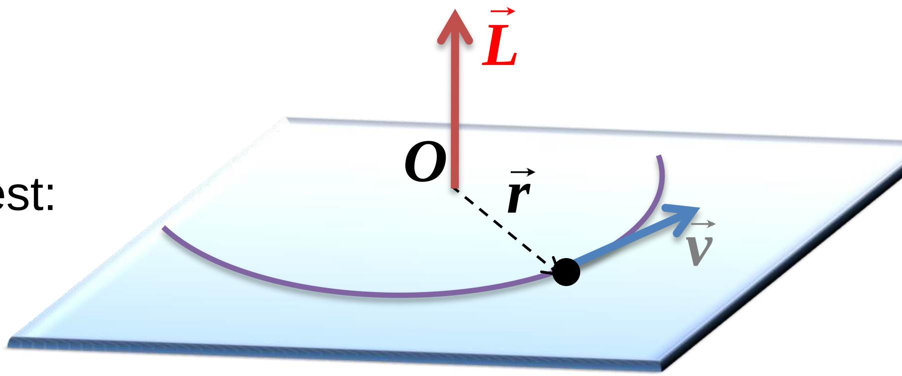
La ligne joignant le soleil à la planète balaie des aires égaux en des temps égaux. **2°loi de Képler**

Moment cinétique

Moment cinétique d'une particule

Soit une particule de masse m animée d'une vitesse $\vec{v}$ en rotation par rapport à un point O.

Le moment cinétique de m par rapport à O est:



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{\mathcal{P}} = m\vec{r} \times \vec{v}}$$

Le module de L est:

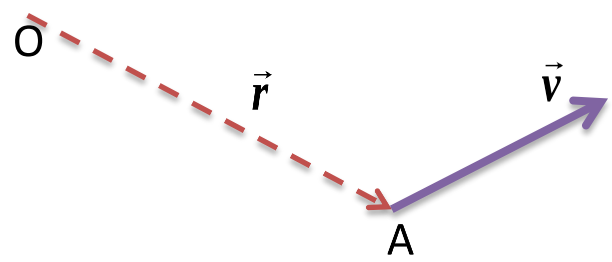
$$L = r\, p\, sin(\vec{r}, \vec{\mathcal{P}}) = mr\, v \sin\alpha$$

$$\vec{L} \perp \vec{r} \quad et \quad \vec{L} \perp \vec{\mathcal{P}}$$

$(\vec{r}, \vec{v}\ et\ \vec{L})$ **Forment un trièdre direct**

Remarque:

On rappelle que le moment d'un vecteur $\vec{v}$ par rapport à un point O est:



$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{\vec{v}/o} = \overrightarrow{OA} \times \vec{v}}$$

En regardant la définition du moment cinétique,

$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \times \vec{\mathcal{P}} = \vec{r} \times \vec{\mathcal{P}}$$

On peut dire que $\vec{L}$ est le moment de $\vec{\mathcal{P}}$ par rapport à O

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{\mathcal{P}}/o}}$$

Théorème du moment cinétique :

Jusqu'à présent nous avons caractérisé le mouvement d'une particule par sa quantité de mouvement: $\vec{\mathcal{P}} = m\vec{v}$

La variation de la quantité de mouvement par rapport au temps est donnée par: $\vec{F} = d\vec{\mathcal{P}}/dt$

La quantité de mouvement est constante si $\vec{F} = \vec{0}$

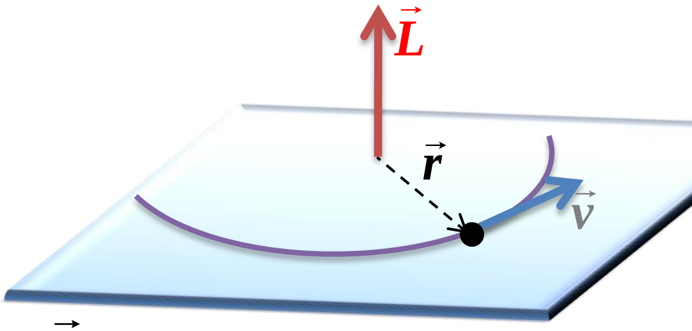
Il est possible de caractériser le mouvement d'une particule par le moment de sa quantité de mouvement: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{\mathcal{P}}$ ou moment cinétique.

La variation du moment cinétique par rapport au temps est reliée au moment de la force par: $d\vec{L}/dt = \vec{r} \times \vec{F}$

Cette relation n'est qu'une autre façon d'écrire la relation fondamentale. $\vec{F} = d\vec{P}/dt$

Théorème du moment cinétique :

IL s'agit de trouver la dérivée du moment cinétique



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{\mathcal{P}} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{\mathcal{P}})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\mathcal{P}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Donc:

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/o}}$$

Théorème :

La dérivée du moment cinétique d'une particule, par rapport au temps est égale au moment des forces appliquées au même point.

Analogie avec la deuxième loi de Newton :

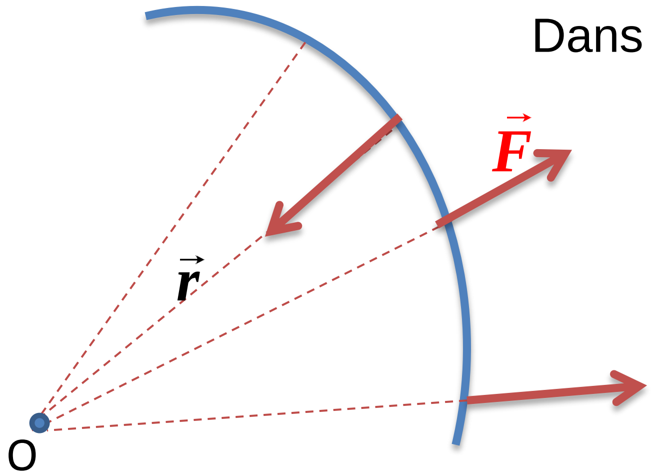
Rectiligne	Rotation
$\vec{\mathcal{P}}$	$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{p}/o}$
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt}$	$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/o} = \dfrac{d\vec{\mathcal{M}}_{\vec{\mathcal{P}}/o}}{dt}$

Le théorème du moment cinétique est donc une traduction de la deuxième loi de Newton en terme de moments

Forces centrales :

Définition d'une force centrale :

Une force centrale est celle dont la direction passe toujours par un point fixe O (centre de force).



Dans tout ces cas on a:

$$\vec{r} // \vec{F} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = constante$$

Sous l'action d'une force centrale, la moment cinétique par rapport au centre de force est constant

Applications:

- $2^{ème}$ loi de Kepler (loi des aires):

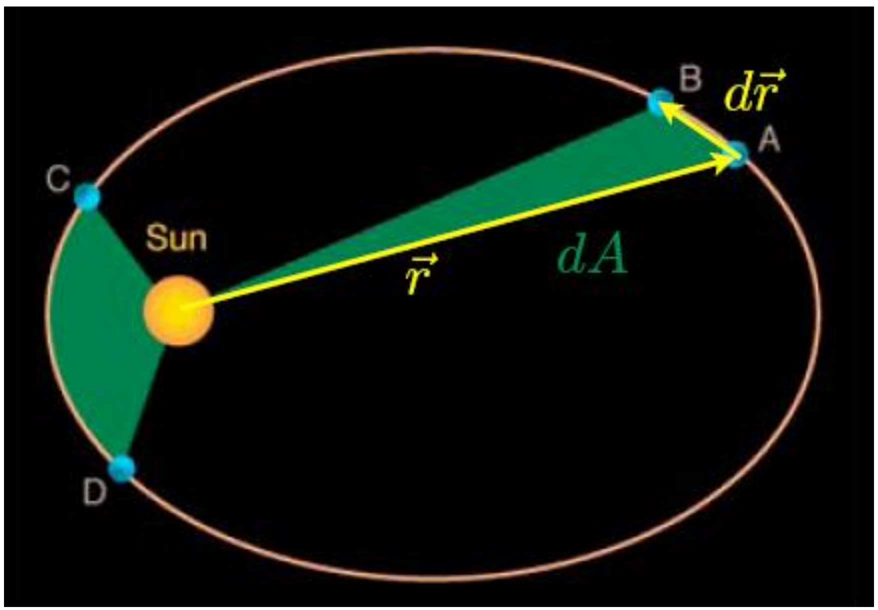
Johannes Kepler (1571-1630)

force radiale : $\rightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{\mathcal{P}} = C^{et}$

$\searrow \vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$

$\searrow \dfrac{\vec{L}}{m} = \vec{r} \times \vec{v} = C^{et}$

dA : c'est l'aire balayer par la planète pendant dt.



$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| dt = \frac{L}{2m} dt$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}}$$

La ligne joignant le soleil à la planète balaie des aires égaux en des temps égaux. **2°loi de Képler**