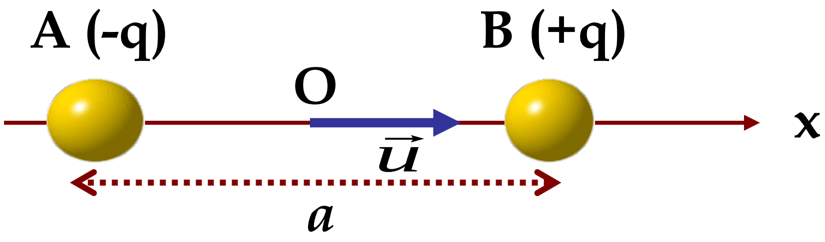
Par A.DIB

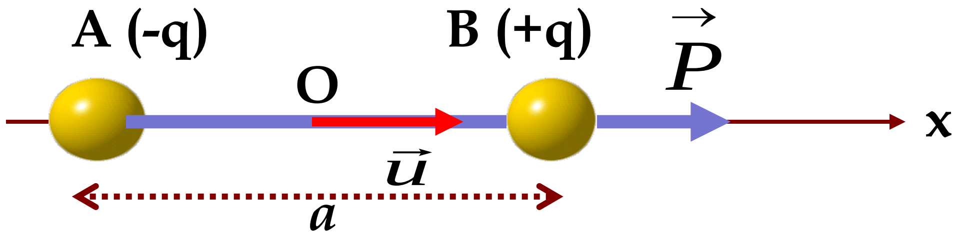
Le dipôle électrostatique

1. **Définition** : Un dipôle électrostatique est défini par un ensemble de charges distinctes disposées de telle sorte que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives.



Le dipôle électrostatique

Moment dipolaire électrique :



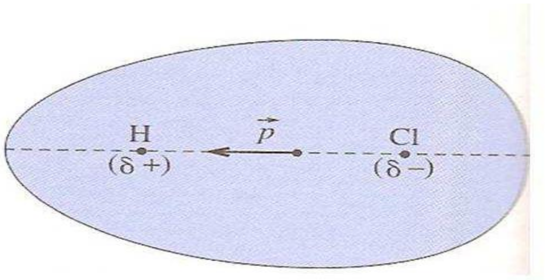
$$\vec{P} = a\,q\,\vec{u}$$

a: distance séparant les deux charges

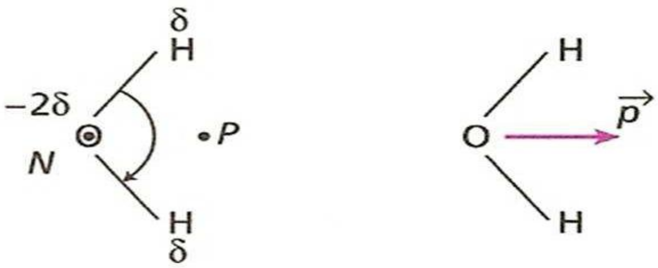
$\vec{u}$: vecteur unitaire

P : s'exprime en (C.m) dans le système SI.

Le dipôle électrostatique



a

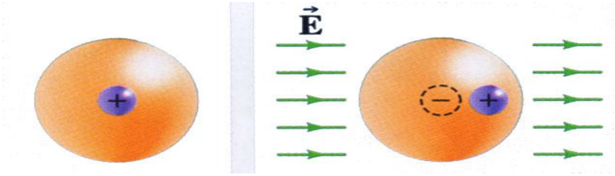


b

Les molécules comme le H_2O et le HCl ont un dipôle permanent et sont dites « *polaires* ».

Le dipôle électrostatique

Dipôles induits:



Les molécules $\vec{P} = \alpha_m \vec{E}$

α_m C.m^2.V^{-1}

Les atomes $\vec{P} = \varepsilon_o \alpha \vec{E}$

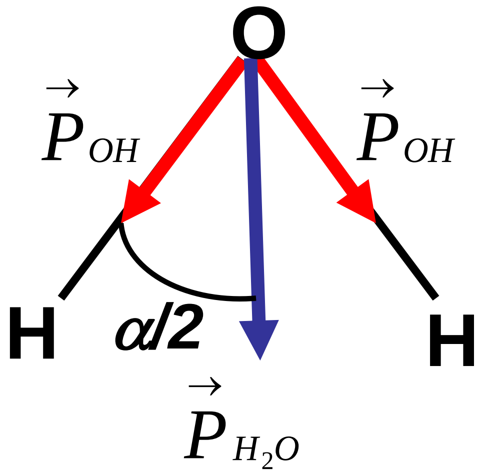
Les molécules non-polaires peuvent avoir un dipôle *induit* par un champ électrique.

Le dipôle électrostatique

Exemple :

La molécule d'eau a un moment dipolaire P_{H2O} =1,85 D. En déduire les charges portées par les atomes d' hydrogène et l'atome d'oxygène.

Données: α=(OH, OH)=104° ; l= OH= 0,096 *nm* et



$$\vec{P}_{H_2O} = \vec{P}_{OH} + \vec{P}_{OH}$$

$$\vec{P}_{OH} = \vec{P}_{OH} = ql$$

$$\vec{P}_{H_2O} = 2ql\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

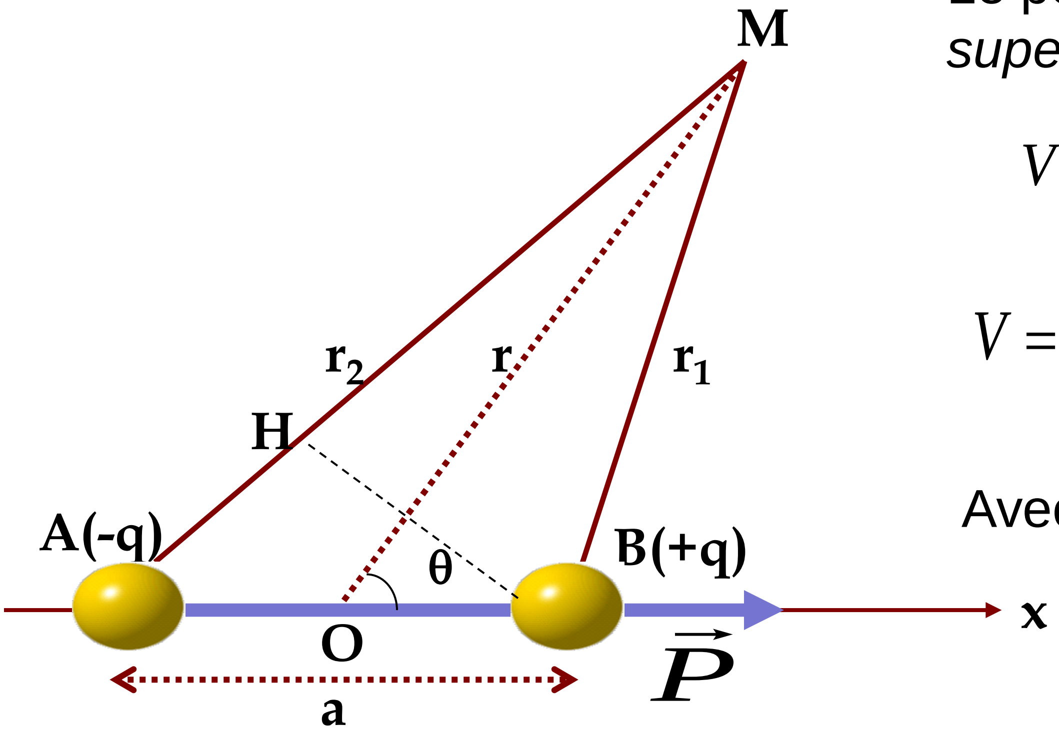
$$q = \frac{P_{H_2O}}{l\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \approx \frac{e}{3}$$

Le dipôle électrostatique

Moment dipolaire de certaines molécules polaires	
Molécule	**P (c.m)10^{-30}**
HCl	3,43
Hbr	2,60
HI	1,26
H_2O	5,30
CO	0,40
H_2S	6,20
SO	5,30
NH_3	5,00
C_2H_5OH	3,60

Le dipôle électrostatique

2. Potentiel électrique créé par un dipôle électrostatique (le calcul se fait dans l'approximation dipolaire)



Le potentiel au point *M (principe de superposition)*

$$V = V_1 + V_2$$

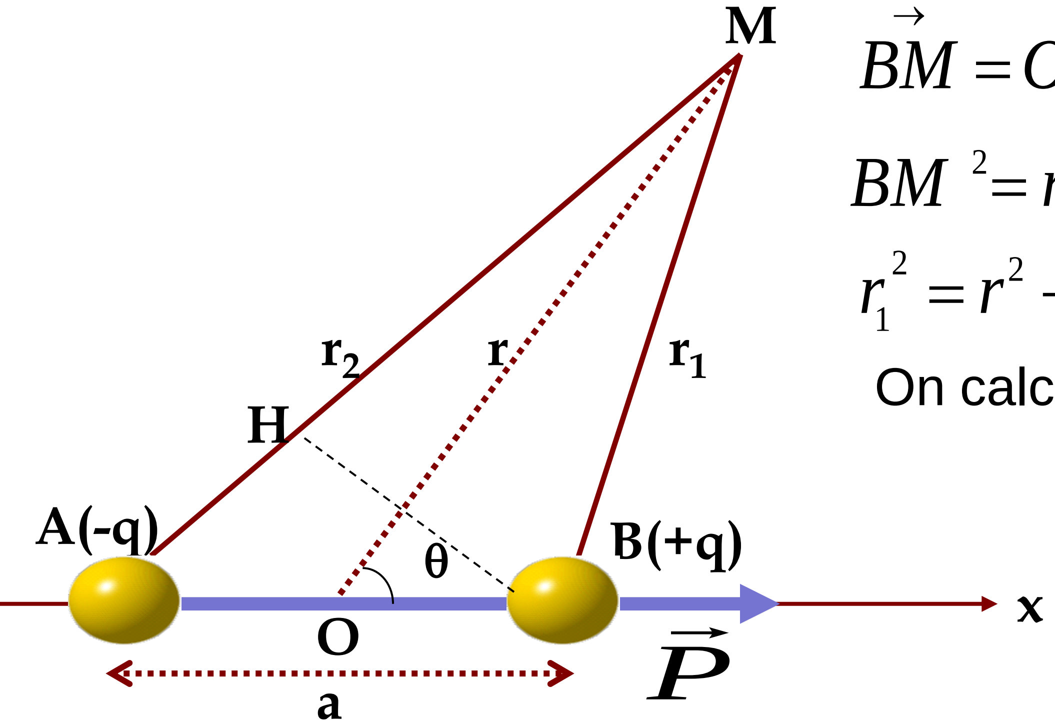
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Avec : $r_1 = BM$ et $r_2 = AM \gg a$

Le dipôle électrostatique

2. Potentiel électrique créé par un dipôle

calcul des distances r_1 et r_2



D'après la relation de Shales :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \vec{r} - a\vec{u}$$

$$BM^2 = r^2 + a^2 - 2a\,\vec{r}\cdot\vec{u}$$

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta$$

On calcule ensuite $1/r_1$

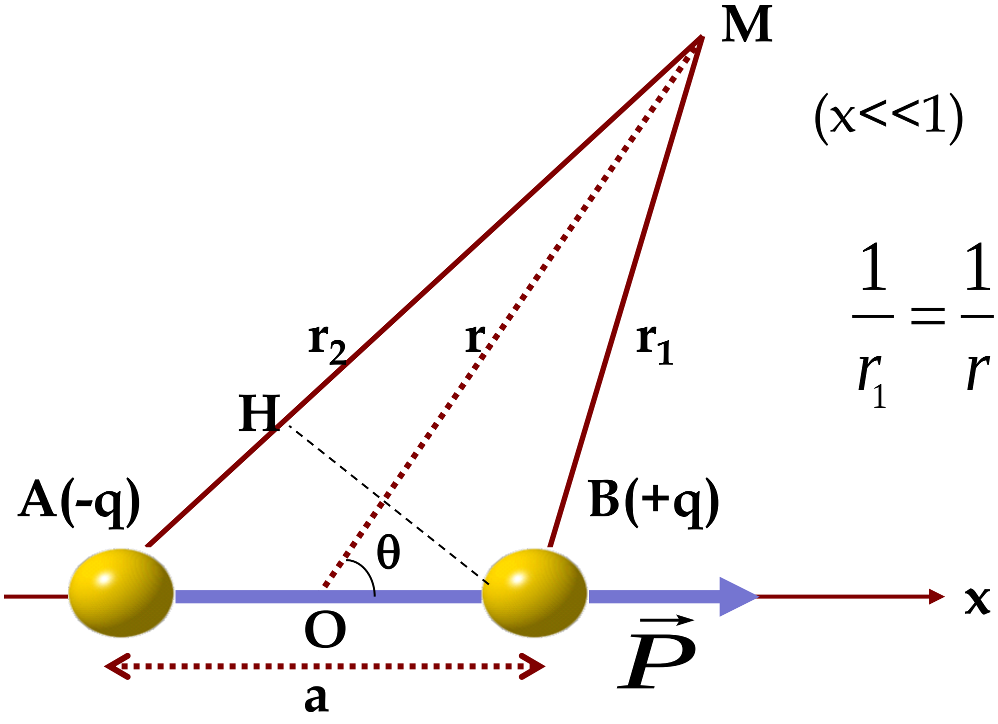
$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}}$$

$$\frac{1}{r_1} = \left(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta\right)^{-1/2}$$

Le dipôle électrostatique

2. Potentiel électrique créé par un dipôle

On rappelle le développement limité à l'ordre 1 de: $$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x$$



(x<<1) On pose x = a/r, (x<<1)

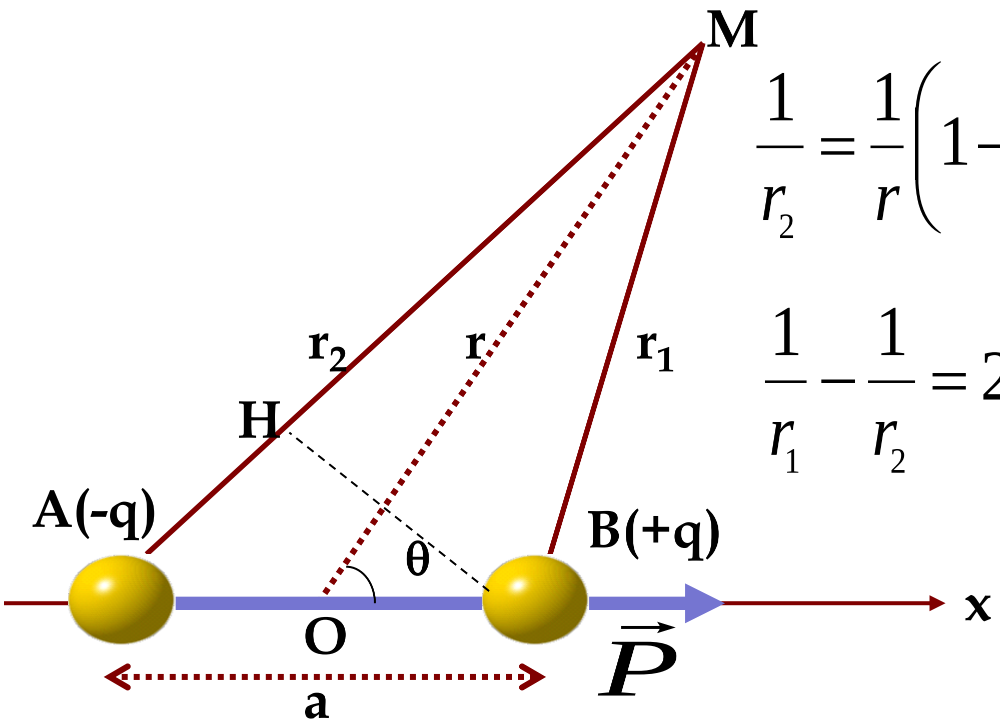
$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}$$

Un DL au 1er ordre

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

Le dipôle électrostatique

2. Potentiel électrique créé par un dipôle



$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

Par conséquent

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 2\frac{a}{r^2}\cos\theta$$

D’où le potentiel

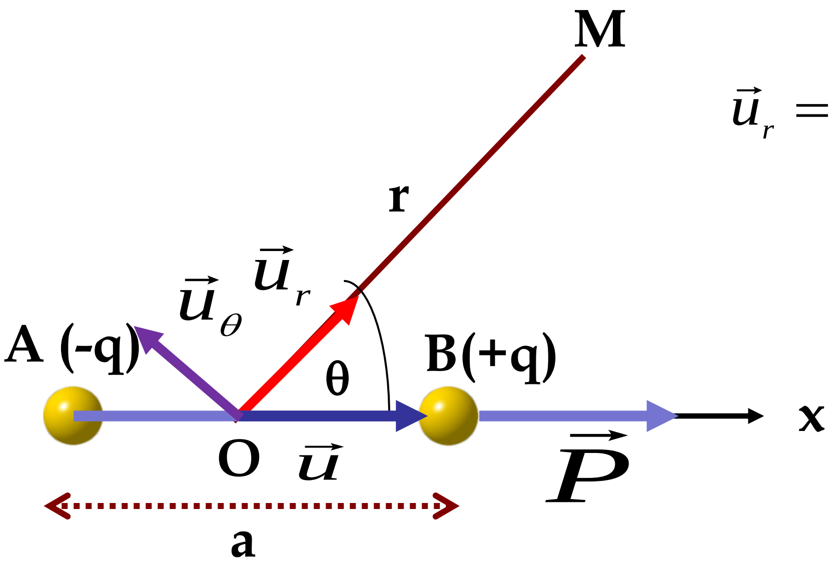
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{r^2}\cos\theta$$

Le dipôle électrostatique

2. Potentiel électrique créé par un dipôle

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\cos\theta}{r^2}}$$

En notant:



$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{avec} \quad (\vec{u}_r \cdot \vec{u} = \cos\theta)$$

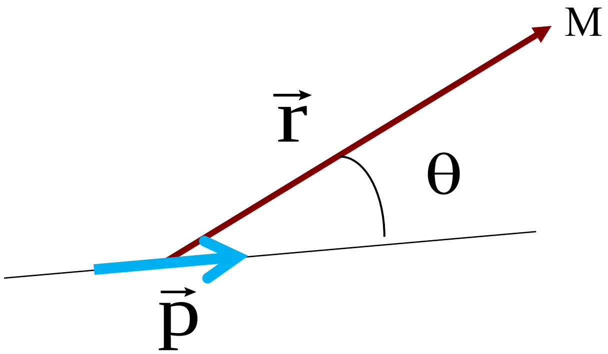
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{u}_r}{r^2}$$

Le dipôle électrique

2. Potentiel électrique créé par un dipôle

2. 1. Surface équipotentielle

V=cste=Vo



$$V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2} = V_o$$

$$V_o = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r_o^2}$$

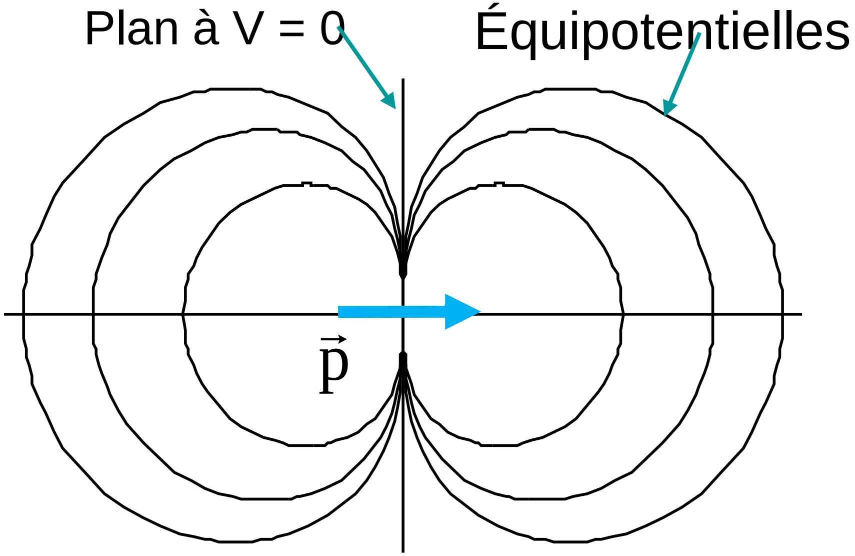
$$\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r_o^2}$$

$(\vec{p}, \vec{r})$ $\qquad r^2 = r_o \cos\theta$

Le dipôle électrique

2. Potentiel électrique créé par un dipôle

2. 1. Surface équipotentielles



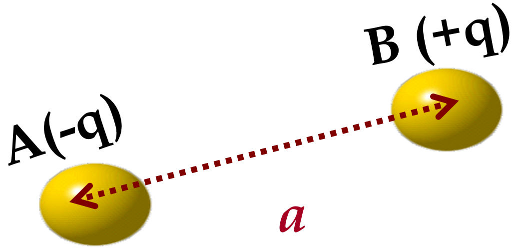
Le dipôle électrostatique

2. Potentiel électrostatique créé par un dipôle

2. 2. Energie d'interaction interne d'un dipôle électrostatique

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

$$W = \frac{1}{2}\left((-q)\frac{(+q)}{4\pi\varepsilon_o a} + (+q)\frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_o a} \right) = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o a}$$

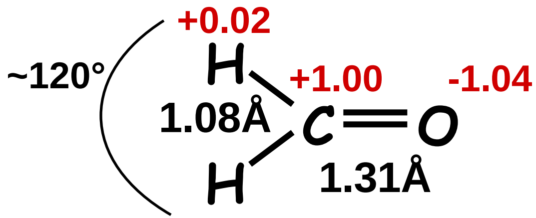


$$W = -\frac{p^2}{8\pi\varepsilon_o a^3}$$

Le dipôle électrostatique

2. 2. Energie d’interaction interne d’un dipôle électrostatique

Exemple: Molécule de formaldéhyde: HCHO



$$W_{HCHO} = 2\,W_{HC} + W_{CO} + 2\,W_{HO}$$

$$W_{HCHO} = \frac{(1.6\,10^{-19})^2}{4\pi\varepsilon_o\,10^{-10}} \quad 2 \left(\frac{0.02\times1.00}{1.08} \qquad \frac{1.00\times1.04}{1.31}\;2 \qquad \frac{0.02\times1.04}{2.07} \right)$$

$W_{HCHO} \approx$ -1.08 10^3 kJ/mol **NEGATIF → COHESION !!!**

Le dipôle électrique

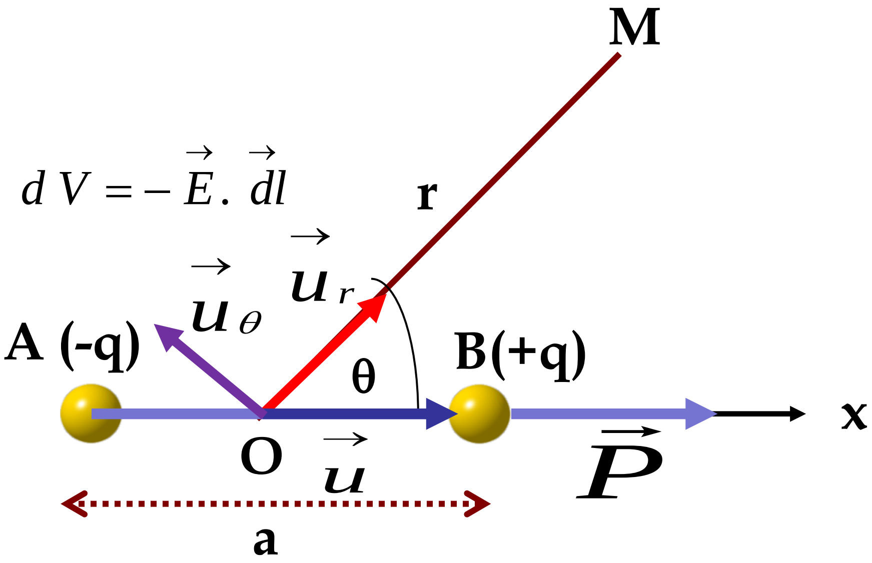
3. Champ électrique créé par un dipôle électrostatique

$$\vec{E} = -\,\overrightarrow{grad}\, V$$

$$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(E_r \cdot dr + E_\theta \cdot r\,d\theta\right)$$



Le dipôle électrique

3. Champ électrique créé par un dipôle électrostatique

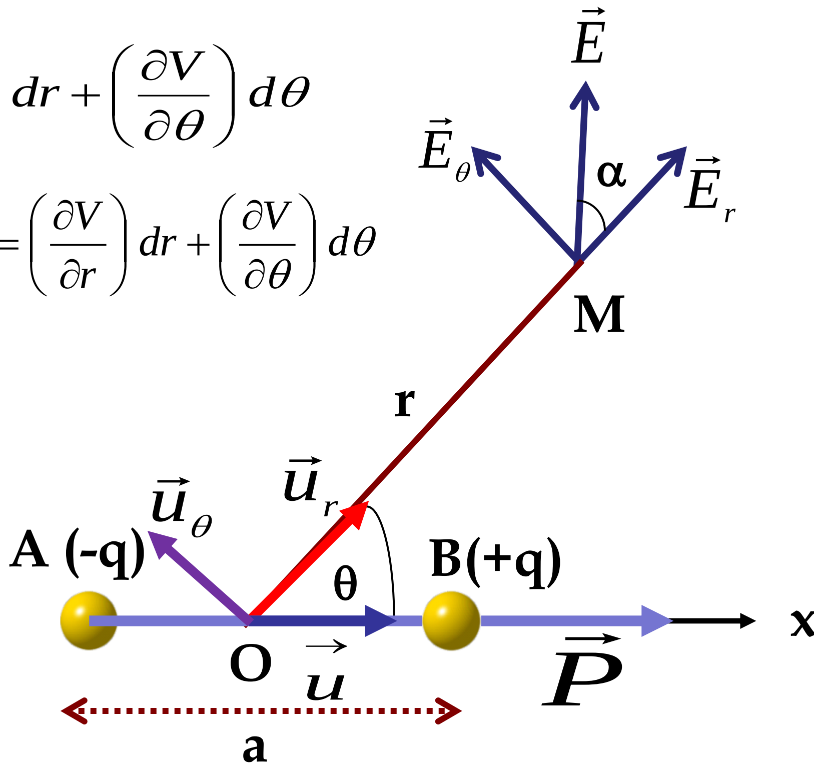
$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) d\theta$$

$$dV = -\left(E_r . dr + E_\theta . r\, d\theta\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) d\theta$$

$\vec{E}(M)$

$$E_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$



Le dipôle électrique

3. Champ électrique créé par un dipôle électrostatique

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$\left\|\vec{E}\right\| = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

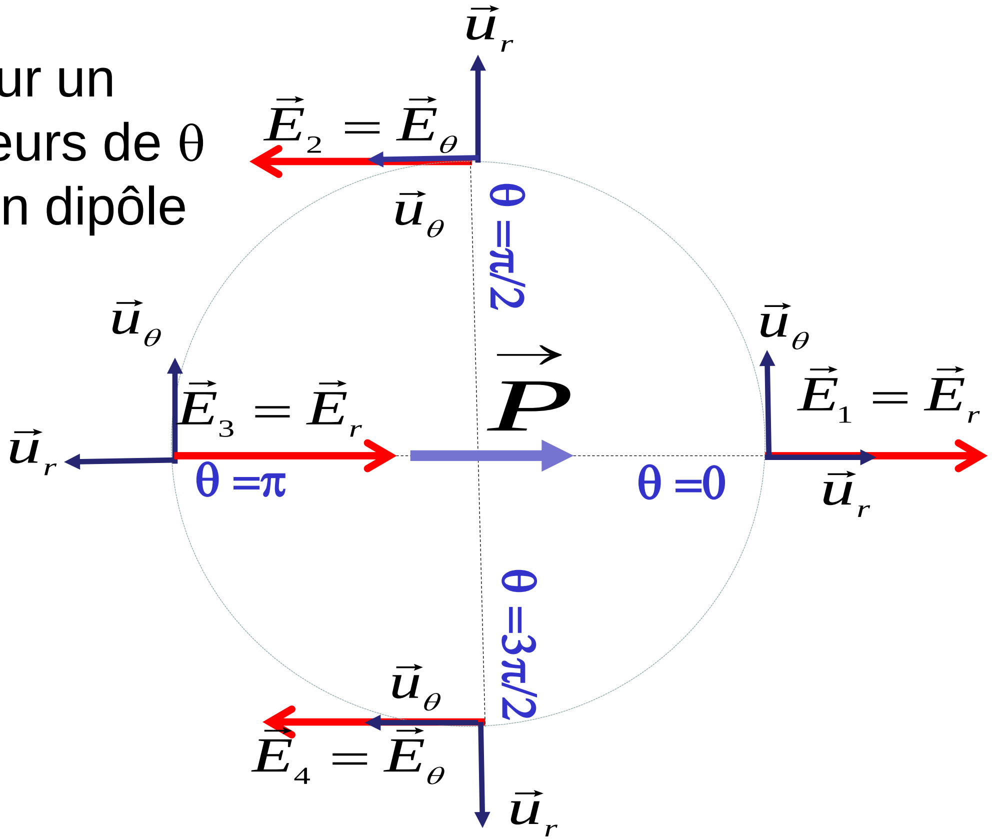
$$\beta = (\vec{E},\vec{u}_r) \quad tg\beta = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{tg\theta}{2}$$

Le dipôle électrostatique

Exercice : Déterminer et représenter sur un cercle de rayon a pour différentes valeurs de θ le vecteur champ électrique créé par un dipôle

.

θ	0	π/2	π	3π/2
$\vec{E}_r$	$\vec{E}_1 = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_o r^3}$	$\vec{0}$	$\vec{E}_3 = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_o r^3}$	$\vec{0}$
$\vec{E}_\theta$	$\vec{0}$	$\vec{E}_2 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{u}_\theta$	$\vec{0}$	$\vec{E}_4 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{u}_\theta$



Le dipôle électrostatique

Formulation du champ $\vec{E}$ dans la base des coordonnées cartésiennes

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}(3\cos^2\theta - 1)\vec{i} + \frac{p}{4\pi\varepsilon_o r^3}(3\sin\theta\cos\theta)\,\vec{j}$$

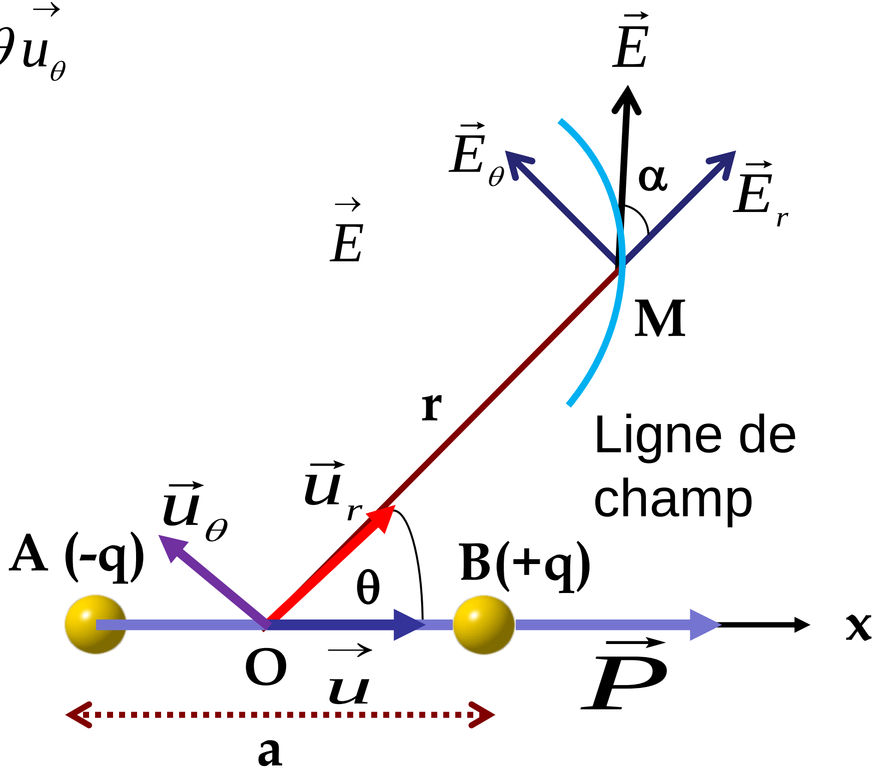
Le dipôle électrostatique

4. Topographie du champ électrique créé par un dipôle

$$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{E} = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta$$

$$d\vec{l} \times \vec{E} = \vec{0}$$



Le dipôle électrostatique

4. Topographie du champ électrique créé par un dipôle

D'où $$dr E_\theta - r d\theta E_r = 0$$

$$\frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{E_r}} = \frac{\mathbf{rd\theta}}{\mathbf{E_\theta}}$$

$$\frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{r\,d\theta}{\sin\theta}$$

Le dipôle électrostatique

4. Topographie du champ électrique créé par un dipôle

$$\frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta} = \frac{2d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

D'où par intégration $\ln(r) = 2\ln(\sin\theta) + cste$

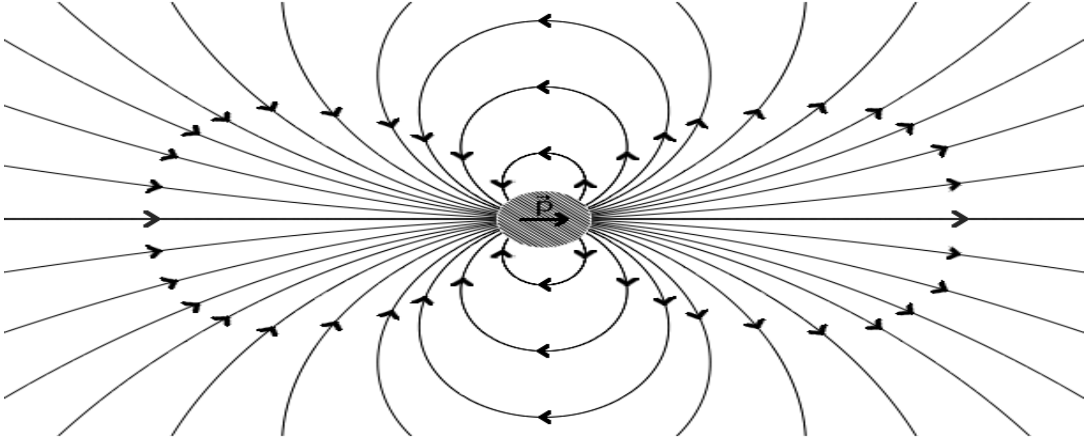
$$r = r_o(\sin\theta)^2$$

Pour θ=π/2, r=ro

$$\begin{cases} x = r_o \sin\theta^2 \cos\theta \\ y = r_o \sin\theta^3 \end{cases}$$

Le dipôle électrostatique

4. Topographie du champ électrique créé par un dipôle



Le dipôle électrostatique

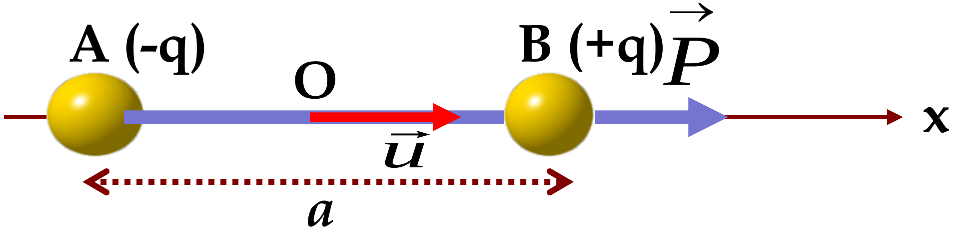
5. Dipôle électrostatique placé dans un champ électrique uniforme

5. 1. Énergie potentielle d'un dipôle électrique

$$E_p = (-q)V_A + (+q)V_B = q(V_B - V_A)$$

$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = V_A - V_B \qquad \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = V_A - V_B = \vec{E}.\overrightarrow{AB}$$

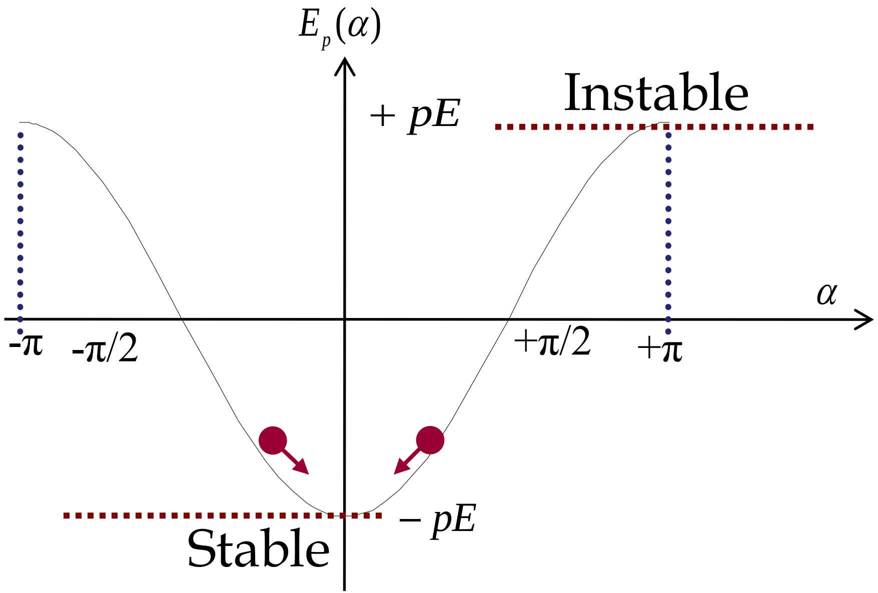
$$\vec{p} = q\,\overrightarrow{AB} \qquad E_p = q(V_B - V_A) = -q\,\vec{E}.\overrightarrow{AB} = -\vec{p}.\vec{E}$$

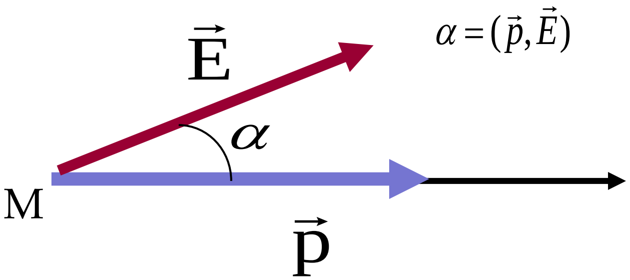


Le dipôle électrostatique

5. Dipôle électrostatique placé dans un champ électrique uniforme

5. 1. Énergie potentielle d'un dipôle électrique





$$E_p = -pE_M \cos\alpha$$

Le dipôle électrique

5. Dipôle électrostatique placé dans un champ électrique uniforme

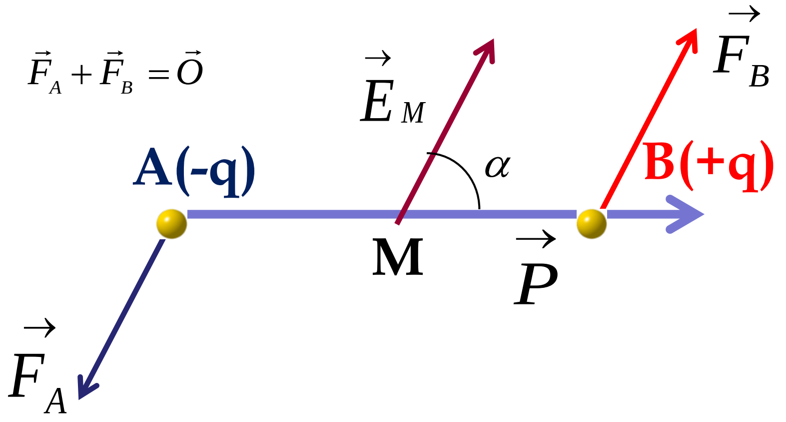
5. 2. Moment du couple – force agissant sur un dipôle:

Les deux forces peuvent s'écrire:

$$\vec{F}_A = -q\vec{E}_A \qquad \vec{F}_B = q\vec{E}_B$$

$$\vec{F}_A \approx -q\vec{E}_M \qquad \vec{F}_B \approx q\vec{E}_M$$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{O}$$



$$\vec{L}_+ = (\frac{a}{2}\vec{u}) \wedge q_+\vec{E}$$

$$\vec{L}_- = (\frac{a}{2}\vec{u}) \wedge q_-\vec{E}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_- + \vec{L}_+ = \vec{p} \wedge \vec{E}_M$$

Le dipôle électrostatique

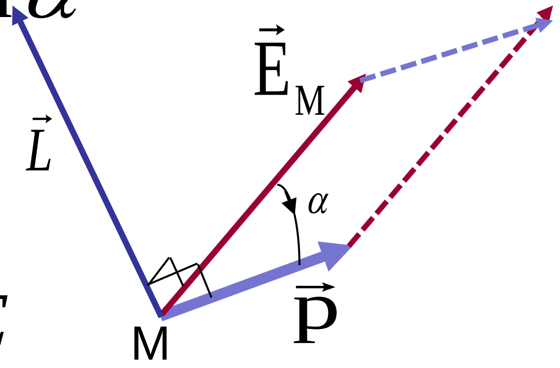
5. Dipôle électrostatique placé dans un champ électrique uniforme

5. 2. Moment du couple – force agissant sur un dipôle:

$$\vec{L} = \vec{p} \wedge \vec{E} = \|\vec{p}\|\|\vec{E}\| \sin\alpha\, \vec{k}$$

$$L = \|\vec{p}\|\|\vec{E}_M\| \sin\alpha$$

$\alpha = 0$ $\rightarrow$ **alignement !**

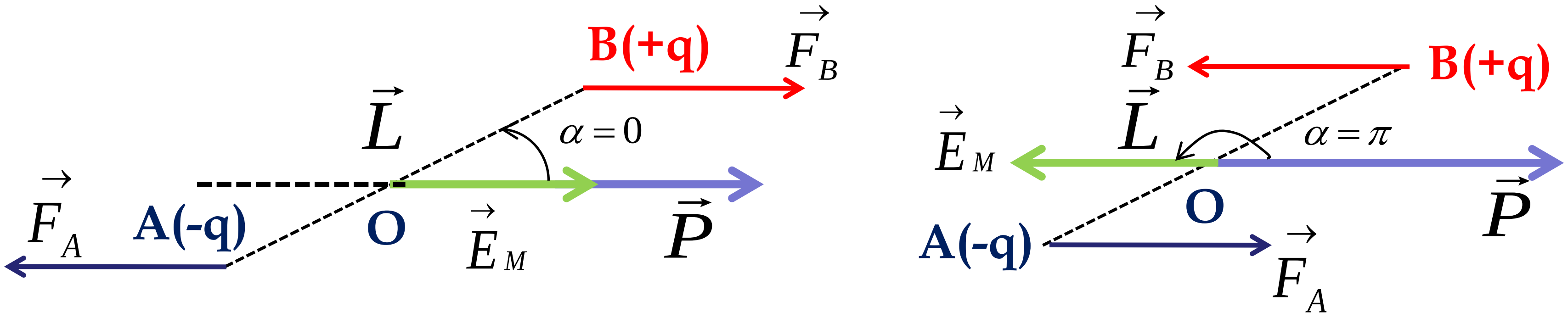


$$W = \int_{o}^{\pi} L\, d\alpha = 2\, p\, E$$

Le dipôle électrique

5. Dipôle électrostatique placé dans un champ électrique uniforme

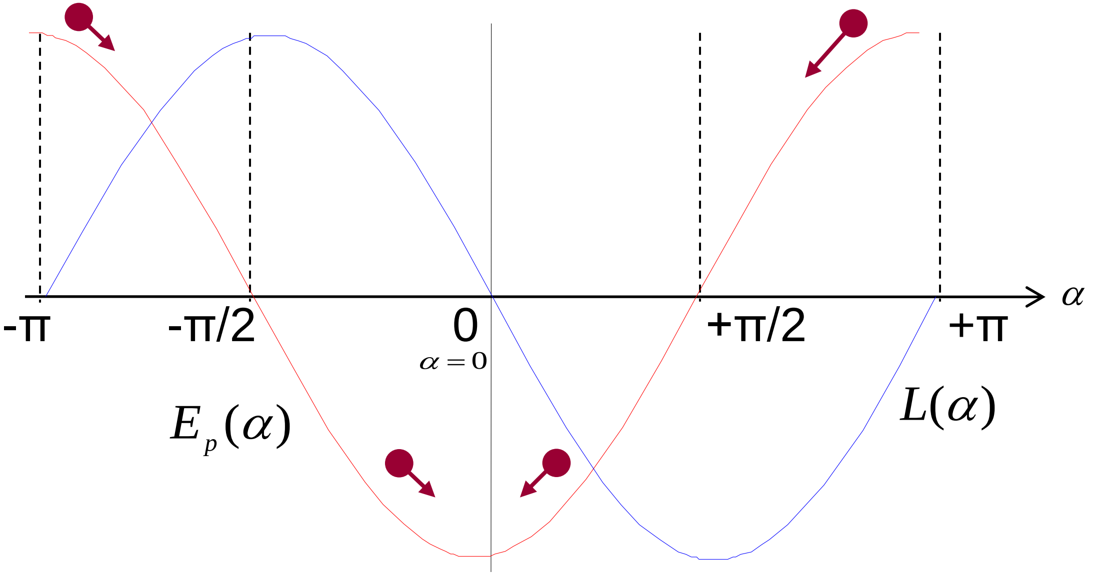
5. 2. Moment du couple – force agissant sur un dipôle:



Le dipôle électrostatique

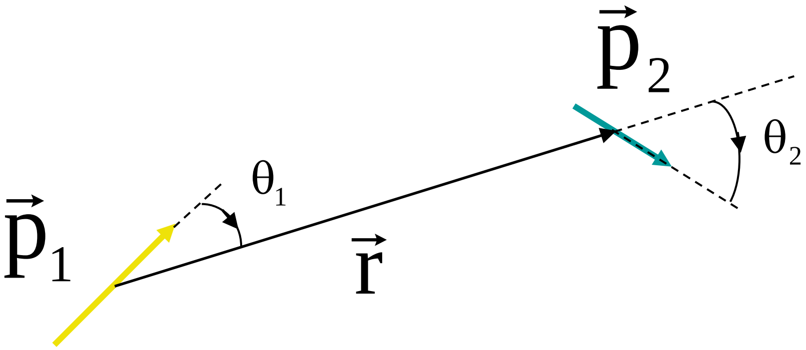
5. Relation entre le couple de rotation et l'énergie potentielle du dipôle

$$-\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(pE\cos\alpha\right) = -pE\sin\alpha = L$$



Le dipôle électrostatique

Interaction entre deux dipôles : Origine et nature des forces de cohésion



$$\vec{E}_{\vec{p}_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}\left(3\frac{\vec{p}_1 . \vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{p}_1\right)$$

$$E_p = -\vec{p}_2 . \vec{E}_{\vec{p}_1}$$

$$E_p = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_o r^3}\left(3\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \cos(\theta_2 + \theta_1)\right)$$

Le dipôle électrostatique

Test d'évaluation

1. Un dipôle se définit comme :

A. deux charges de même signe et de même valeur absolue, séparées par une distance donnée.

B. deux charges de signes opposés mais de même valeur absolue, séparées par une distance donnée.

C. Le moment dipolaire est-il une caractéristique d'une distribution de charges , sans dépendre du choix fait pour le point O

D. Déterminer le moment dipolaire P, de deux charges séparées par une distance a

E. En système SI, quelle est son unité ?

F. En présence d'un champ électrique les molécules et les atomes acquièrent un moment dipolaire induit .

G. Quelle est l'origine le force d'attraction de Van Der Waal ?

2. Potentiel

A. Rappeler l'expression du potentiel électrique V(M) crée par un dipôle, P selon OZ , placé en un point O

B. Le potentiel varie-t-il, en $\frac{1}{r}$, en $\frac{1}{r^2}$, en $\frac{1}{r^3}$

3. Champ

A. Le champ crée par un dipôle, varie-t-il $\frac{1}{r}$, en $\frac{1}{r^2}$, en $\frac{1}{r^3}$

B. représenter l’allure des équipotentielles et des lignes de champ pour un dipôle.

avec, u_z est un vecteur unitaire de la direction (z'z) du repère (Oxyz). Γ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$.

Si on libère le dipôle, il tend sous l'action de $\vec{\Gamma}$ à tourner pour atteindre une position d'équilibre ($\vec{\Gamma} = \vec{0}$) dans laquelle $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$ sont colinéaires : $\alpha = (\vec{p}, \vec{E}_0) = 0 \text{ ou } \Pi$.

- Pour $\alpha = 0$ ($\vec{p}$ a le même sens que $\vec{E}_0$).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à le ramener à cette position (figure IV-5-a). L'équilibre est **stable.**

- Pour $\alpha = \Pi$ ($\vec{p}$ est antiparallèle à $\vec{E}_0$).

Si on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de force tend à l'éloigner de cette position (figure IV-5-b). L'équilibre est **instable.**