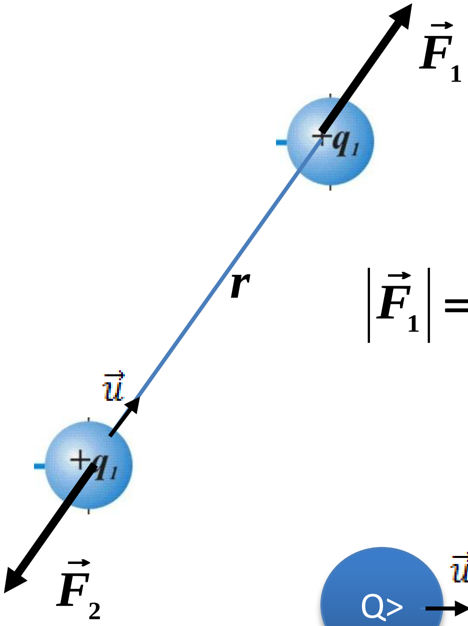
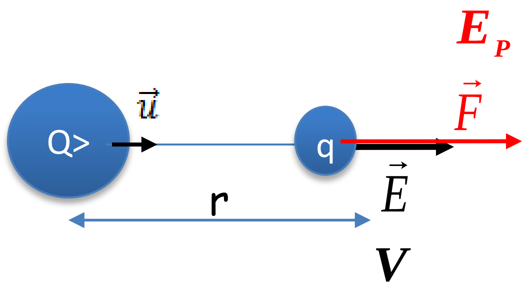
Champs et potentiels électrique

Par A.DIB



$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



$$\boxed{\vec{E} = \frac{k\,|Q|}{r^2}\,\vec{u}} \qquad \boxed{V = \frac{k\overline{Q}}{r}}$$

$$\vec{F} = \overline{q}\vec{E} = k\,\frac{\overline{q}Q}{r^2}\,\vec{u}$$

$$E_P = \overline{q}V = k\,\frac{\overline{q}\overline{Q}}{r}$$

En électrostatique:

On appelle champ électrique une région de l'espace où, en tout point, une charge **q**, maintenue immobile, est soumise à l'action **d'une force électrique**.

On introduit alors une grandeur vectorielle $\vec{E}$: appelée champ électrique.

De la même manière en mécanique, si au voisinage de la terre, où règne le champ de la pesanteur $\vec{g}$, on place une masse **m**, elle sera **soumise à la force de gravitation** qui, dans ce cas, n'est autre que son poids.

On peut noter l'analogie entre le champ électrique $\vec{E}$ et le champ de gravitation $\vec{g}$ créé par la terre. Seulement $\vec{g}$ **<u>est toujours dirigé vers le centre de la terre</u>** alors que le sens du champ électrique **<u>dépend du signe des charges qui le créent</u>**.

N.B. 1°) L'existence d'un champ ne se manifeste que lorsqu'on y introduit un corps:

-- de masse m dans le cas la gravitation

-- de charge q dans le cas de l'électrostatique.

2°) Le champ désigne :

-- la région de l'espace où une particule est soumise à l'action d'une force

-- la grandeur vectorielle $\vec{E}$ ou $\vec{g}$ par exemple.

Avec le concept de champ électrique, le problème est posé d’une façon différente.

Une charge électrique **Q fixe, appelée ″charge source ″, crée dans l’espace qui l’entour un ″état physique″ , appelé ″champ électrique″, qui est mis en évidence par son action sur toute autre charge** q placée en un point M de cet espace.

Cet ″état″ existe même en l’absence de la charge q.

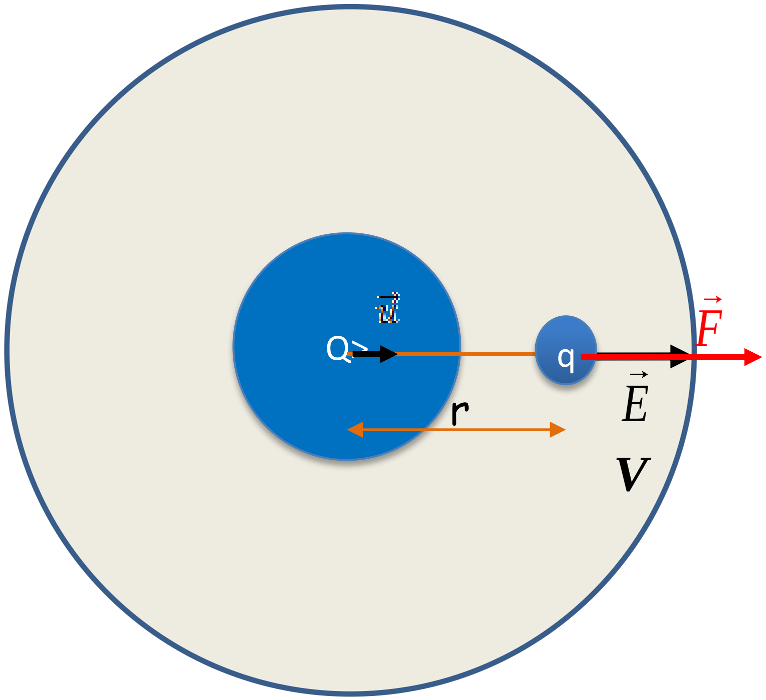
Les charges Q et q ne jouent plus ici le même rôle : Q est la charge source du champ électrique qu’elle crée et q la charge mobile placée dans ce champ, dont le comportement sera étudié.

Le champs électrique est dirigé du potentiel le plus élevé vers le plus petit.

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\vec{u} \qquad V = \frac{kQ}{r}$$

$$\vec{F} = \bar{q}\vec{E} = k\frac{\bar{q}Q}{r^2}\vec{u}$$

$$E_P = \bar{q}V = \bar{q}\frac{k\bar{Q}}{r}$$

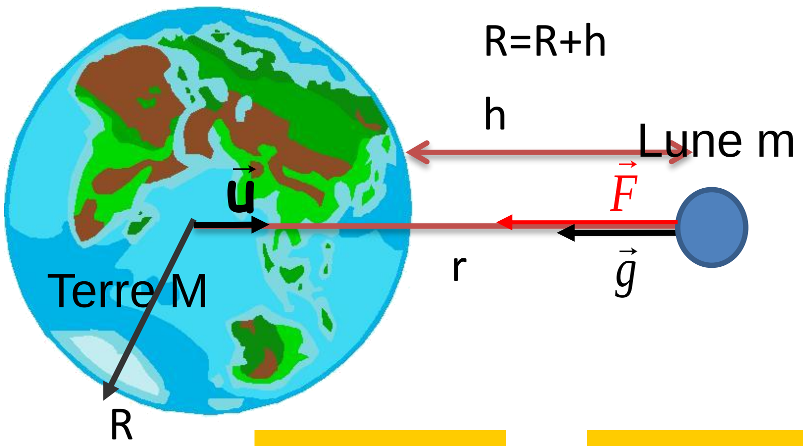


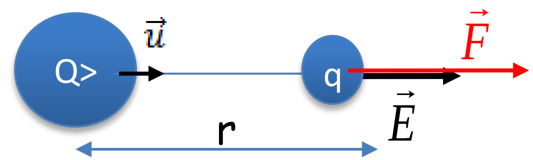
Rappel: champ et potentiel gravitationnels

Pour définir le champ électrique et la force électrique, Coulomb a fait une analogie avec le champ et la force de gravitation de Newton.

Force Gravitationnelle (Newton)

Force électrique (Coulomb)





$$U = -G\frac{M}{r}$$

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\vec{u}$$

$$V = \frac{kQ}{r}$$

On place une particule dans le champ .

$$\vec{F} = m\vec{g} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}$$

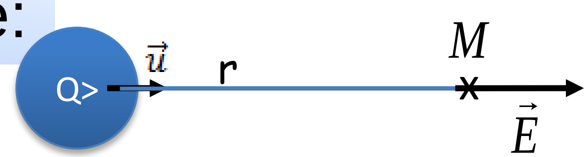
$$\vec{F} = \bar{q}\vec{E} = k\frac{\bar{q}Q}{r^2}\vec{u}$$

$$E_P = mU = -G\frac{Mm}{r}$$

$$E_P = \bar{q}V = k\frac{\bar{q}Q}{r}$$

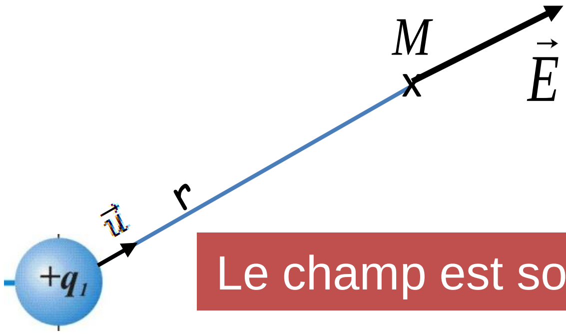
Champ et potentiel crées par des charges ponctuelles:

Charge ponctuelle unique:

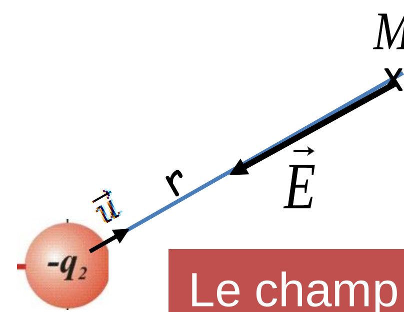


$$\vec{E}_M = \frac{kQ}{r^2}\vec{u}$$

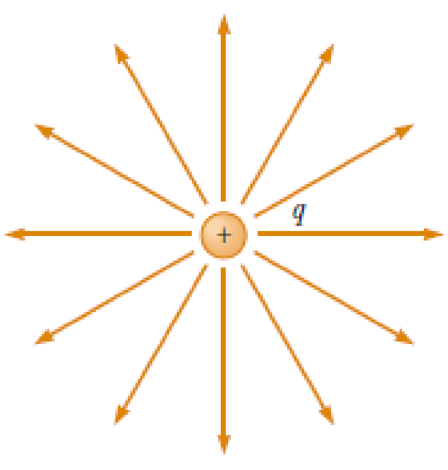
$$V_M = \frac{k\bar{Q}}{r}$$



Le champ est sortant



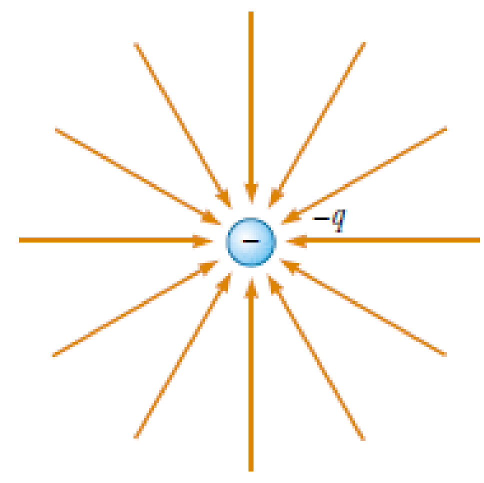
Le champ est rentrant



Une charge ponctuelle crée un champ électrique en point de l'espace :

Si q est positive le champ est sortant.

Si q est négative le champ est rentrant.



Charge ponctuelle unique:

ENERGIE POTENTIELLE ELECTRIQUE (J)

L'énergie potentielle électrique est le travail nécessaire à <u>**la force électrique** </u> pour déplacer une charge ponctuelle (q) à une distance r de Q ver l'infini .

On déplace la charge (q) d' un endroit ou le potentiel (V) est non nul (r), vers un endroit ou le potentiel (V) est nul (∞).

$$W = \int_r^\infty \vec{F}_e . \overrightarrow{d\ell} = \int_r^\infty k \frac{qQ}{r^2} \vec{u} . \overrightarrow{d\ell} = qkQ \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = q \left(-k \frac{Q}{r} \right)_r^\infty = -q(V)_r^\infty = qV(r) - qV(\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$W = -(qV)_r^\infty = -(E_P)_r^\infty = E_P(r) - E_P(\infty) = -\Delta E_P {}_r^\infty \Longrightarrow \begin{cases} E_P(r) = qV(r) \\ E_P(\infty) = 0 \end{cases}$$

POTENTIEL ELECTRIQUE (V)

$$V(r) = k \frac{\bar{Q}}{r}$$

Deux charges ponctuelles:

Une charge positive crée au point M un champ électrique sortant

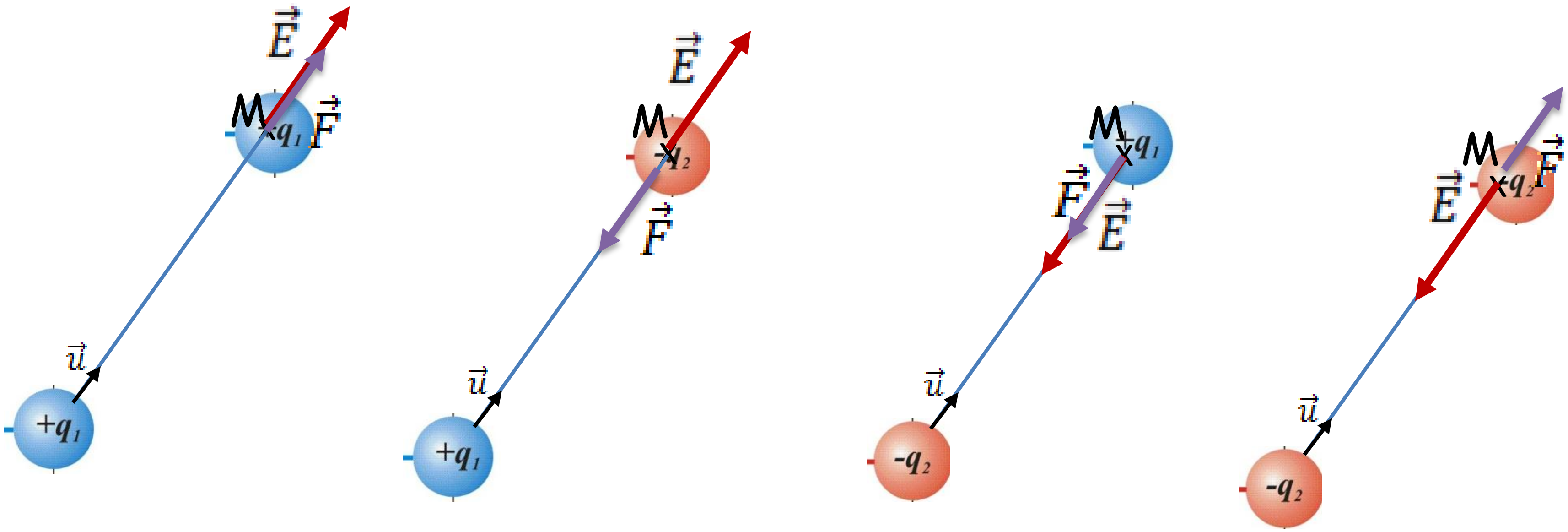
-Si on met une charge positive au point M la force à même sens que $\vec{E}_M$.

-Si on met une charge négative au point M la force est de sens opposée à $\vec{E}_M$.

Une charge négative crée au point M un champ électrique rentrant.

-Si on met **une charge positive** au point M la force à même sens que $\vec{E}_M$.

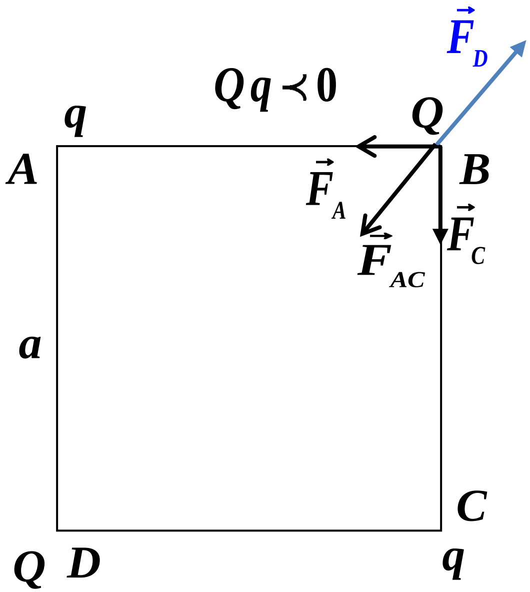
-Si on met **une charge négative** au point M la force est de sens opposée à $\vec{E}_M$.

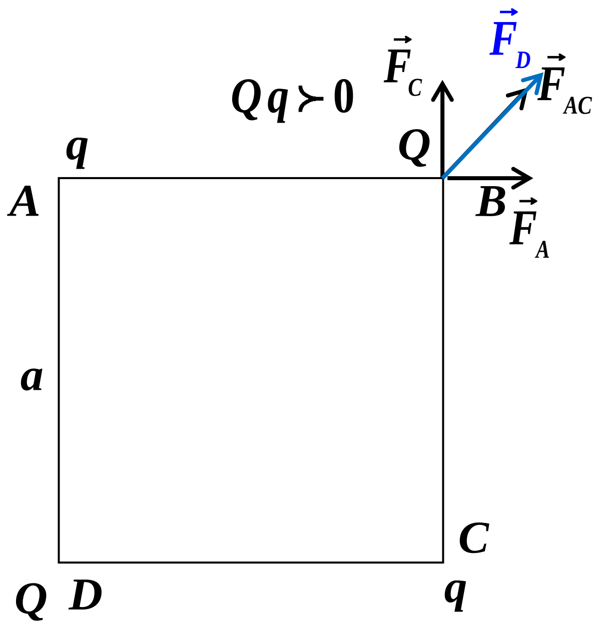


Exercice: 4

Deux **charges** ponctuelles Q sont placées aux deux coins opposés d’un carré de côté a. Deux autres charges q sont placées aux autres coins du même carré.

1-Déterminer l’expression de la force électrique qui s’exerce sur la charge Q du point B.





$$\vec{F}_A = k\frac{qQ}{a^2}\begin{pmatrix}\pm1\\ 0\end{pmatrix}; \quad \vec{F}_B = k\frac{qQ}{a^2}\begin{pmatrix}0\\ \pm1\end{pmatrix};$$

$$\left|\vec{F}_D\right| = k\frac{Q^2}{2a^2} \qquad \left|\vec{F}_{AC}\right| = k\frac{qQ}{a^2}\sqrt{2}$$

$$\boxed{\left|\vec{F}_B\right| = k\frac{Q}{a^2}\left(\frac{Q}{2} \pm q\sqrt{2}\right)}$$

$\vec{F}_B = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_D$: $\vec{F}_B$ *est dans le sens de la plus grande force.*

2-Quelle doit – être la relation ente Q et q pour que cette force soit nulle.

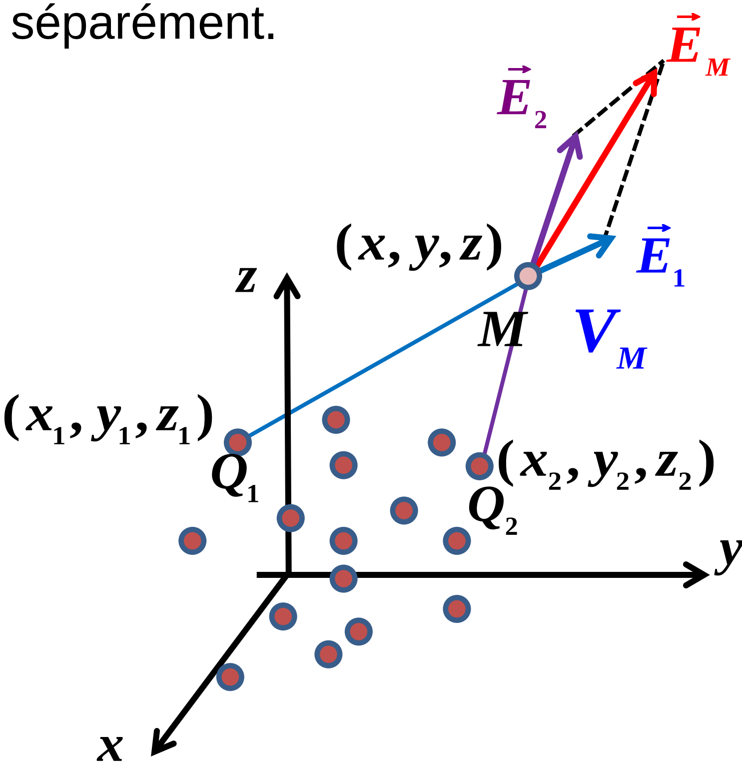
$$\left|\vec{F}_B\right| = k\frac{Q}{a^2}\left(\frac{Q}{2} \pm q\sqrt{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 2\sqrt{2}q}$$

N charges ponctuelles:

PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Avec le principe de superposition nous admettons **que l'action de Q_1 sur q n'est pas modifier par la présence de Q_2** et la même chose pour **Q_2** sur q.

L'action de **Q_1 et Q_2** sur q est la somme des actions de **Q_1 et Q_2** sur q prise séparément.



On considère un ensemble de N charges ponctuelles, on cherche le champ crée par toutes ces charges en un point M de l'espace.

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots\cdots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Le potentiel créé au point M s'écrit:

$$V_M = V_1 + V_2 = k\frac{Q_1}{r_1} + k\frac{Q_2}{r_2}$$

$$V_M = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots + V_N = \sum_{i=1}^{N} V_i$$

On considère un ensemble de N charges ponctuelles.

Le vecteur champ électrique créé par toutes ces charges au point M est la somme **vectorielle** des champs individuels de chaque charge.

De même le potentiel électrique créé par toutes ces charges au point M est la somme algébrique des potentiels individuels.

Si on met une charge q au point M, la force créée est:

$$\vec{F}_M = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots\cdots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = q\vec{E}_M$$

Et l'énergie potentielle en ce point est:

$$E_{P_M} = E_{P_1} + E_{P_2} + E_{P_3} + \cdots\cdots + E_{P_N} = \sum_{i=1}^{N} E_{P_i} = qV_M$$

Si on met une charge Q au point M,

La force électrique appliquée à cette charge est la somme vectorielle des forces individuelles .

L'énergie potentielle appliquée à cette charge est la somme algébrique des énergies potentielles individuelles.

ENERGIE INTERNE D'UNE DISTRIBUTION DE CHAREGES PONCTUELLES :

Travail de la force électrique.

Soit une charge q soumise à une force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$. On la déplace de l'infini ou V=0 à un point M de potentiel V_M

$$W = \int_{\infty}^{M} \vec{F}_{OP}.\overrightarrow{d\ell} = -\int_{\infty}^{M} \vec{F}_{e}.\overrightarrow{d\ell} = \int_{M}^{\infty} \vec{F}_{e}.\overrightarrow{d\ell}$$

$$W = \int_{M}^{\infty} \vec{F}_{e}.\overrightarrow{d\ell} = \int_{M}^{\infty} k\frac{qQ}{r^2}\vec{u}.\overrightarrow{d\ell} = qkQ\int_{M}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = q\left(-k\frac{Q}{r}\right)_{M}^{\infty} = -q(V)_{r}^{\infty} = qV(r) - qV(\infty)$$

Energie potentielle.

$$qV_M = E_P(M) = k\frac{qQ}{r}$$

Soit une charge Q, elle crée un potentiel V en un point M. Si on ramène une charge q de l'infini au point M, l' énergie potentielle du système de deux charges s'écrit:

$$E_p(M) = qV = q\frac{KQ}{r}$$

Cette quantité est appelée énergie interne du système de deux charges notée U.

$$U = k\frac{qQ}{r}$$

L'énergie interne d'un système de deux charges est l' énergie potentielle elle-même.

ENERGIE INTERNE D'UN SYSTEME N DE CHAREGES PONCTUELLES :

Energie interne d'un système de trois charges

Soit un système constitué de trois charges ponctuelles, son énergie interne s'écrit:

$$U = \frac{Kq_A q_B}{AB} + \frac{Kq_A q_C}{AC} + \frac{Kq_B q_C}{BC}$$

Energie interne d'un système de N charges

Soit un système constitué par N charges ponctuelles, son énergie interne s'écrit:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{Kq_i q_j}{r_{ij}}$$

$\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$ Circulation élémentaire du champ.

$$\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2).\overrightarrow{d\ell} = \vec{E}_1.\overrightarrow{d\ell} + \vec{E}_2.\overrightarrow{d\ell} = k\frac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1.\overrightarrow{d\ell} + k\frac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2.\overrightarrow{d\ell} = k\frac{q_1}{r_1^2}dr_1 + k\frac{q_2}{r_2^2}dr_2$$

$$\Downarrow$$

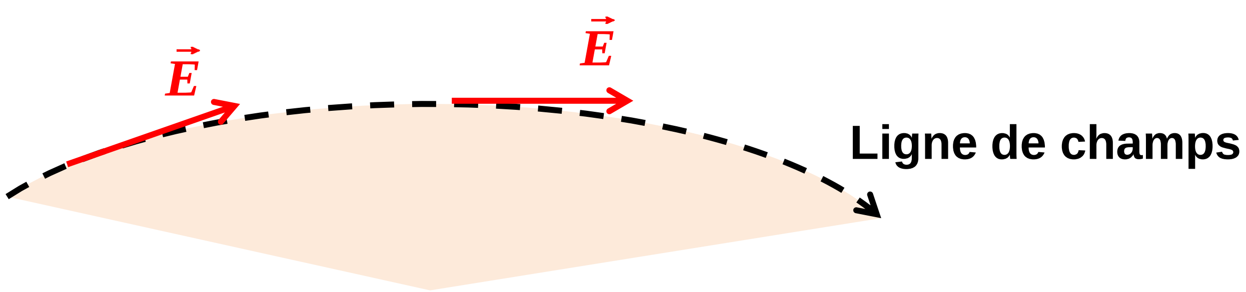
$$\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -dV_1 - dV_2 = -d(V_1 + V_2) = -dV$$

$$\Downarrow$$

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}$$ **Dérive d'un potentiel.**

Lignes de champ et surfaces équipotentielles :

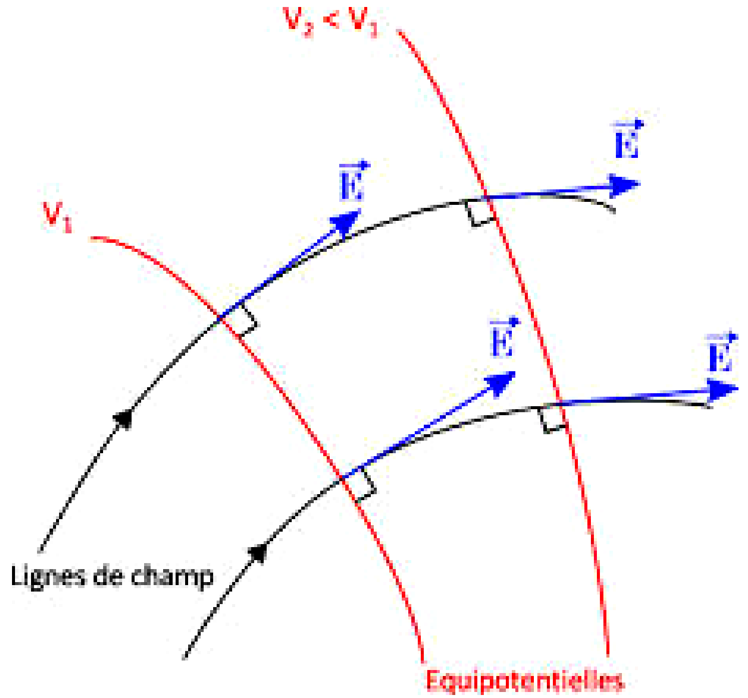
Le champ électrique $\vec{E}$ est tangent aux lignes de champs



Les surfaces équipotentielles sont des surfaces sur lesquelles le potentiel V est constant

PROPRIETES

- ❖Les lignes de champs sont perpendiculaires au équipotentielles
- ❖ Les lignes de champs vont du potentiel le plus grand au plus petit



Passage du potentiel au champ et du potentiel au champ:

$$V(x,y,z) \Rightarrow \vec{E}(x,y,z)$$

La Circulation élémentaire du champ: $dV = -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$

La dérivé partielle de V(x,y,z) est: $dV = \frac{\delta V}{\delta x}dx + \frac{\delta V}{\delta y}dy + \frac{\delta V}{\delta z}dz$

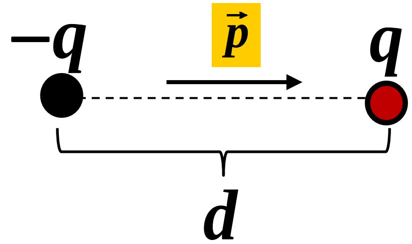
$$\left.\begin{array}{l} dV = -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz \\ dV = \frac{\delta V}{\delta x}dx + \frac{\delta V}{\delta y}dy + \frac{\delta V}{\delta z}dz \end{array}\right\} \Rightarrow E_x = -\frac{\delta V}{\delta x}; \quad E_y = -\frac{\delta V}{\delta y}; \quad E_z = -\frac{\delta V}{\delta z}$$

$$\vec{E}_M \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\delta V}{\delta x} \\ \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{\delta V}{\delta z} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

Dipôle électrique:

Définition

Le dipôle électrique est constitué par l' arrangement de deux charges ponctuelles q égales, de signes opposés, séparées par une petite une distance d



Un dipôle est caractérisé par son ″moment dipolaire électrique '' ou ″moment électrique″ : $\vec{p} = q\vec{d}$

Exemples de dipôles électriques

Certaines molécules se comportent naturellement comme des dipôles permanents, ceci est du au fait qu'au sein de la molécule, le barycentre des charges négatives et positives ne coïncident pas. Ces molécules sont dites polaires.
Cette configuration est observable pour certaines molécules.

-La molécule HCl possède une liaison polaire. Son nuage électronique est asymétrique, les électrons se trouvent préférentiellement prés de l'atome de chlore.
-La molécule d'eau H_2O, de forme triangulaire possède également un moment dipolaire. Sa polarisation résulte de la polarité de la liaison OH.

Les molécules comme H_2O et HCl ont un dipôle permanent et sont dites « *polaires* ».

Moment dipolaire de certaines molécules polaires	
Molécule	**P (c.m)10^{-30}**
HCl	3,43
Hbr	2,60
HI	1,26
H_2O	5,30
CO	0,40
H_2S	6,20
SO	5,30
NH_3	5,00
C_2H_5OH	3,60

Potentiel électrique créé par un dipôle électrostatique à grande distances

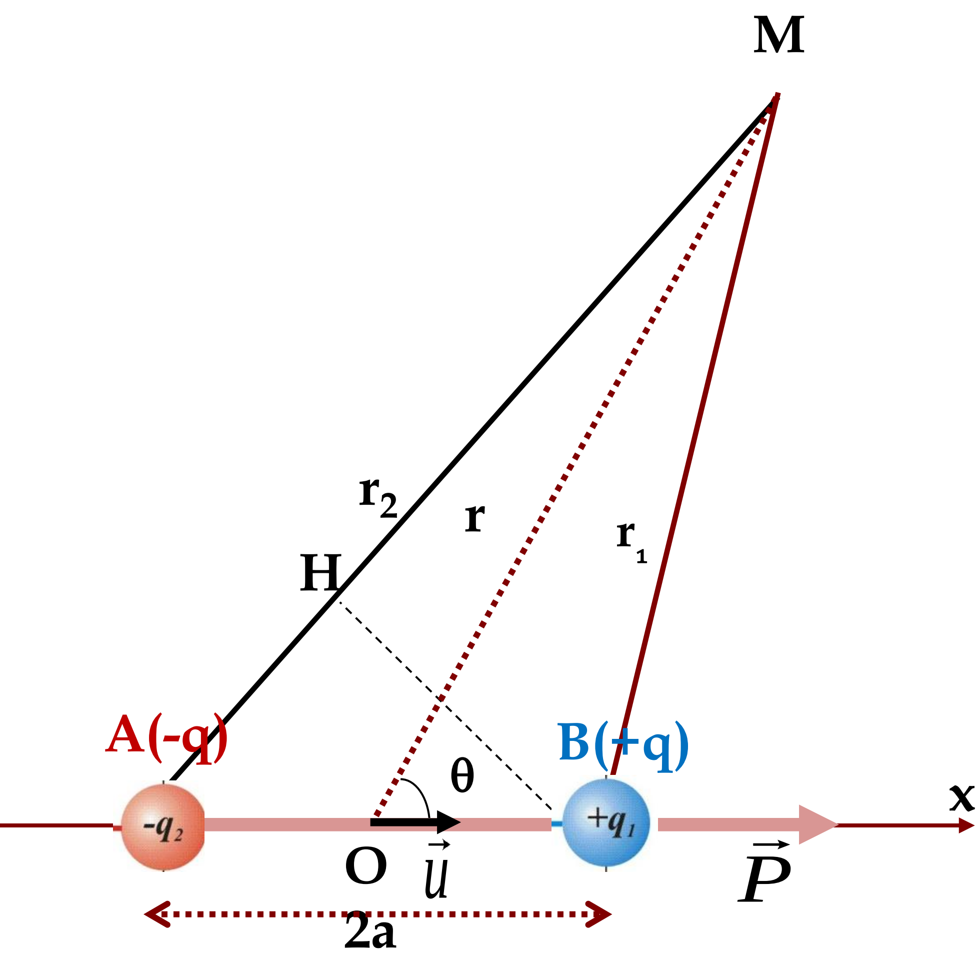
(le calcul se fait dans l'approximation dipolaire)

Le potentiel au point *M :(principe de superposition)*

$$V = V_1 + V_2$$

$$\Downarrow$$

$$V = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{-q_2}{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$



Avec : $r_1 = BM$ et $r_2 = AM >> a$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \vec{r} - a\vec{u}$$

$$(BM)^2 = r^2 + a^2 - 2a\vec{r}\vec{u}$$

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

$$\boxed{\vec{P} = 2aq\vec{u}}$$

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta \;\Rightarrow r_1 = r\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{1/2}$$

Pour (x<<1), on écrie:

$$\Downarrow$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{-1/2}$$

On pose x = a/r, (x<<1)

$$\frac{a^2}{r^2} \lll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a\cos\theta}{r}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AO} = \vec{r} + a\vec{u}$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta$$

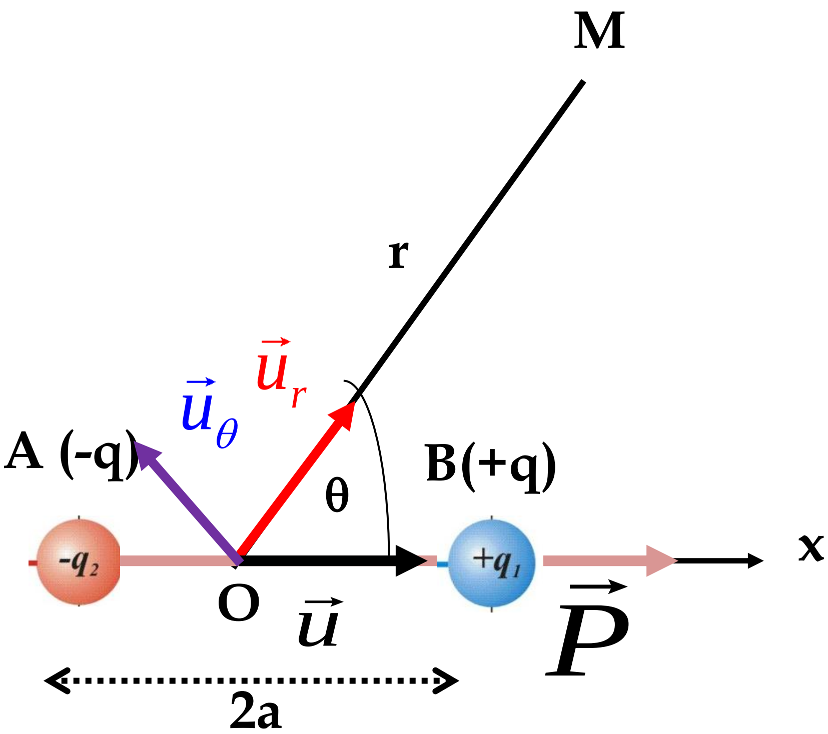
$$\left(AM\right)^2 = \left(OM\right)^2 + \left(AO\right)^2 + 2a\vec{r}\vec{u}$$

$$\boxed{\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a\cos\theta}{r}\right)}$$

Par conséquent
$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2a\cos\theta}{r^2}$$

D’où le potentiel
$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = \frac{k2qa\cos\theta}{r^2}$$

$$\boxed{V(M) = \frac{kP\cos\theta}{r^2}}$$



$$\boxed{V_M = \frac{kP\cos\theta}{r^2}}$$

En notant: $\vec{u}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$ $\quad (\vec{u}_r \cdot \vec{u} = \cos\theta)$

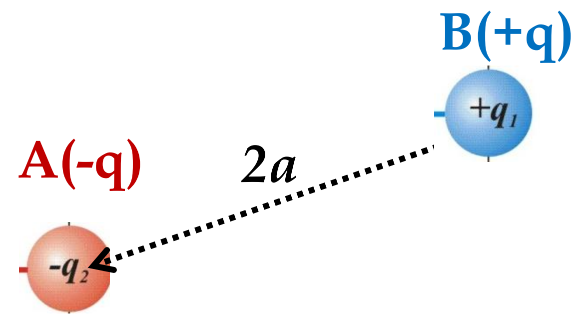
$$\vec{P} = P\vec{u} \Rightarrow P = \frac{\vec{P}}{\vec{u}}$$

$$V(M) = k\frac{\vec{P}}{\vec{u}}\frac{\vec{u}_r.\vec{u}}{r^2} = k\frac{\vec{P}.\vec{u}_r}{r^2}$$

$$\boxed{V_M = k\frac{\vec{P}.\vec{u}_r}{r^2}}$$

Energie d'interaction interne d'un dipôle électrostatique

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i \qquad U = \frac{1}{2}\left((-q)k\frac{+q}{2a} + (+q)k\frac{-q}{2a}\right) = -k\frac{q^2}{2a}$$

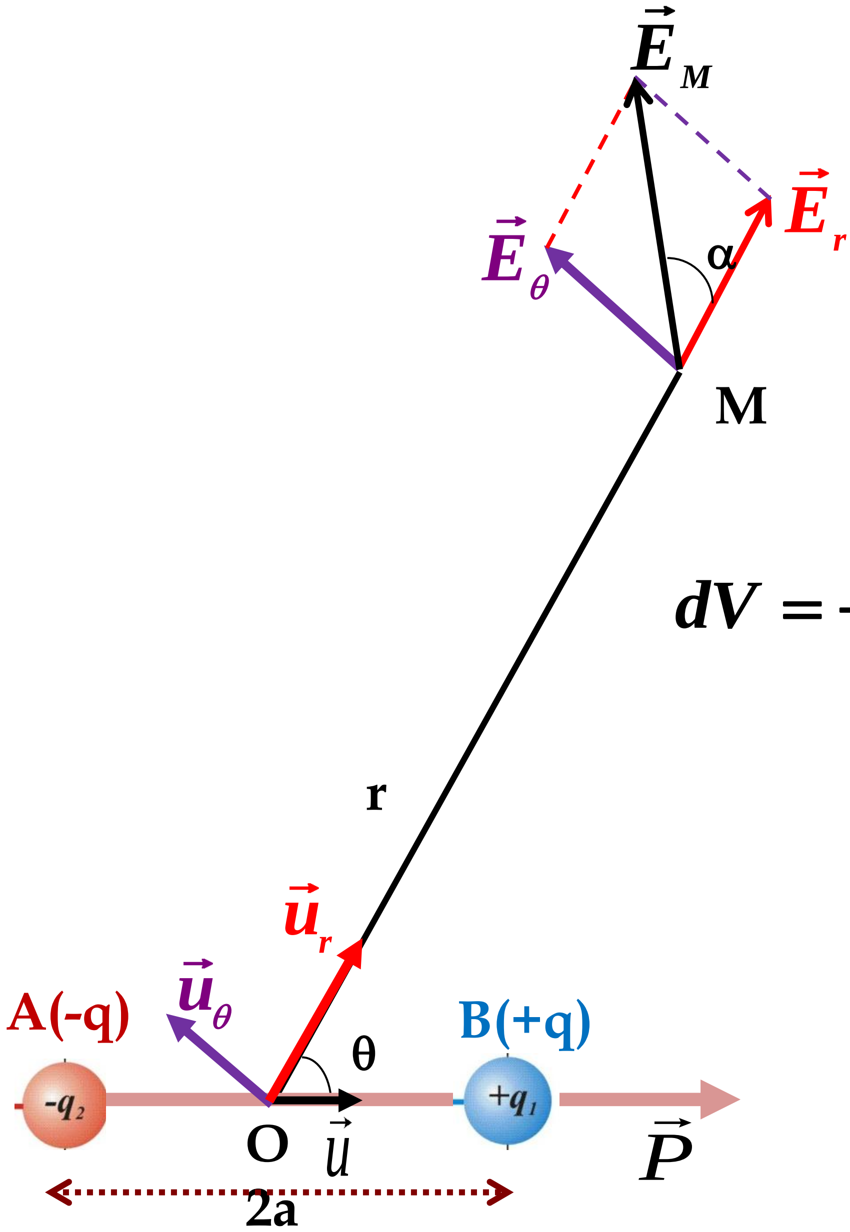


$$U = -k\frac{q^2}{2a} = -k\frac{P^2}{8a^3} \qquad \boxed{U = -\frac{P^2}{32\pi\varepsilon_0 a^3}}$$

Camp électrique créé par un dipôle électrostatique à grande distances

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \qquad \overrightarrow{d\ell} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta$$

Circulation élémentaire du champ: $dV = -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$



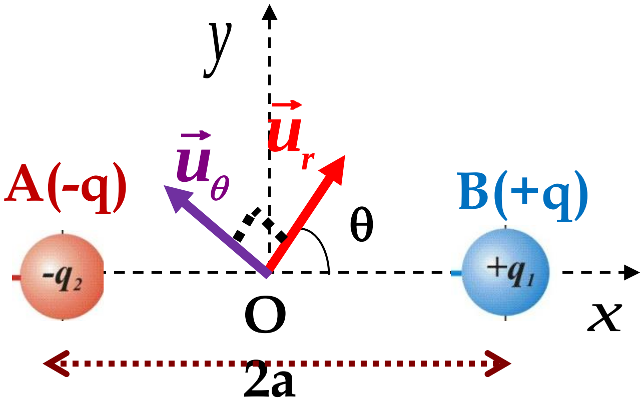
$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = -E_r dr - E_\theta r d\theta$$

$$dV = \frac{\delta V}{\delta r} dr + \frac{\delta V}{\delta \theta} d\theta$$

$$dV = -E_r dr - E_\theta r d\theta = \frac{\delta V}{\delta r} dr + \frac{\delta V}{\delta \theta} d\theta$$

$$\vec{E}_M \begin{cases} E_r = -\dfrac{\delta V}{\delta r} = \dfrac{2kP\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\delta V}{\delta \theta} = \dfrac{kP\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Formulation du champ $\vec{E}$ dans la base des coordonnées cartésiennes



$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

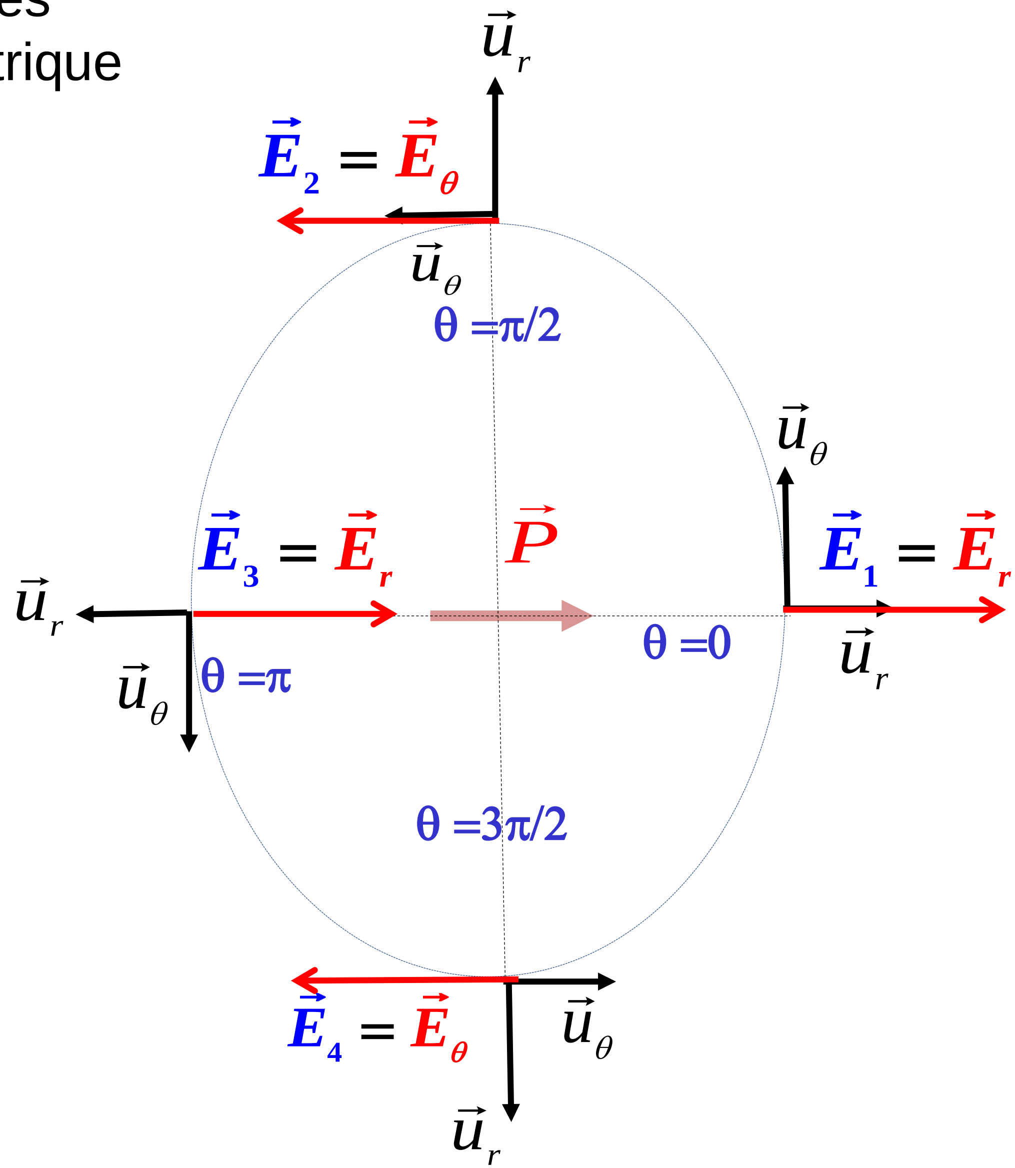
$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = E_r\cos\theta\,\vec{i} + E_r\sin\theta\,\vec{j} - E_\theta\sin\theta\,\vec{i} + E_\theta\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{E} = (E_r\cos\theta - E_\theta\sin\theta)\,\vec{i} + (E_r\sin\theta + E_\theta\cos\theta)\,\vec{j}$$

$$\vec{E}\begin{cases}\dfrac{kp}{r^3}2\cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \dfrac{kp}{r^3}2\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta\end{cases} \qquad \vec{E}\begin{cases}\dfrac{kp}{r^3}3\cos^2\theta - 1 \\ \dfrac{kp}{r^3}3\cos\theta\sin\theta\end{cases}$$

Exercice : Déterminer et représenter sur un cercle de rayon a pour différentes valeurs de θ le vecteur champ électrique créé par un dipôle .

$$\vec{E}_M \begin{cases} E_r = -\dfrac{\delta V}{\delta r} = \dfrac{2kP\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\delta V}{\delta \theta} = \dfrac{kP\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$



Topographie du champ électrique créé par un dipôle

Nous rappelons qu'une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe C définie, telle qu'en chacun de ses points le vecteur lui y tangent. Le vecteur élémentaire local de la ligne de champ en coordonnées polaires doit être parallèle au champ local E : $\overrightarrow{d\ell} \times \vec{E} = 0$

$$\overrightarrow{d\ell} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta$$

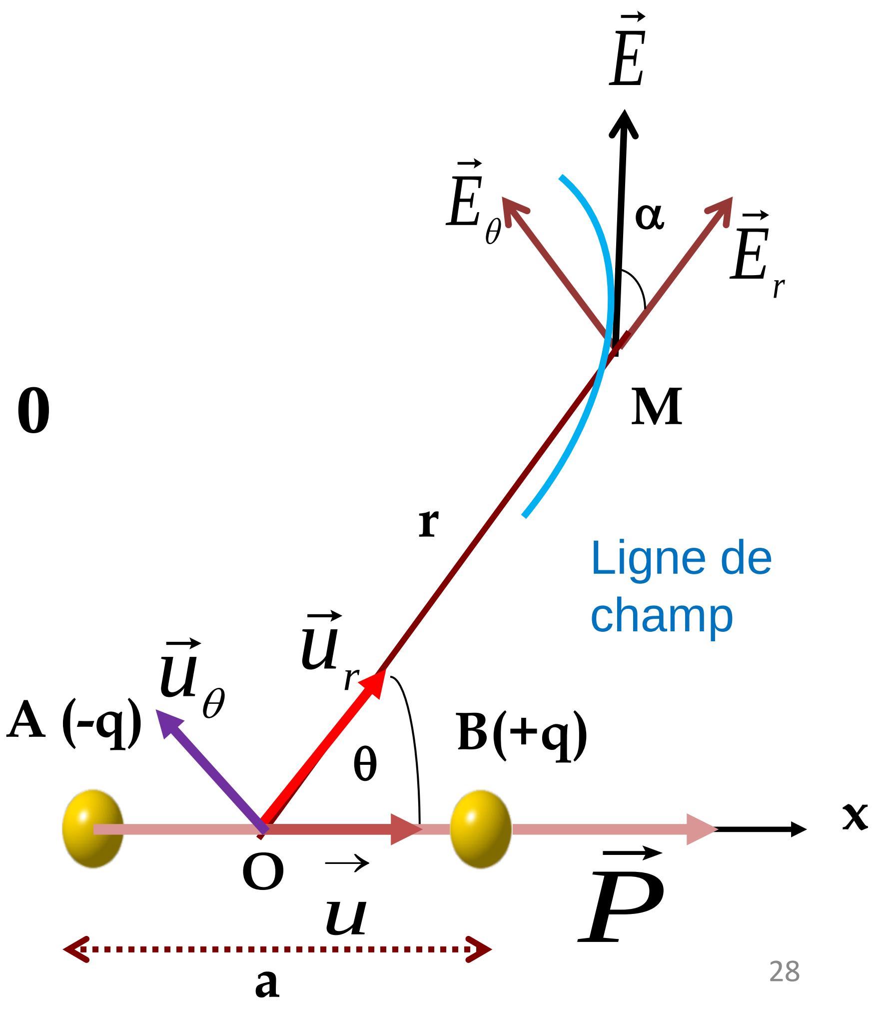
$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{d\ell} \times \vec{E} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\overrightarrow{d\ell} \times \vec{E}\right| = E_\theta dr - rE_r d\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$



Topographie du champ électrique créé par un dipôle

$$\vec{E}_M \begin{cases} E_r = -\dfrac{\delta V}{\delta r} = \dfrac{2kP\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\delta V}{\delta\theta} = \dfrac{kP\sin\theta}{r^3} \end{cases} \Rightarrow \frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{rd\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

$$\Downarrow$$

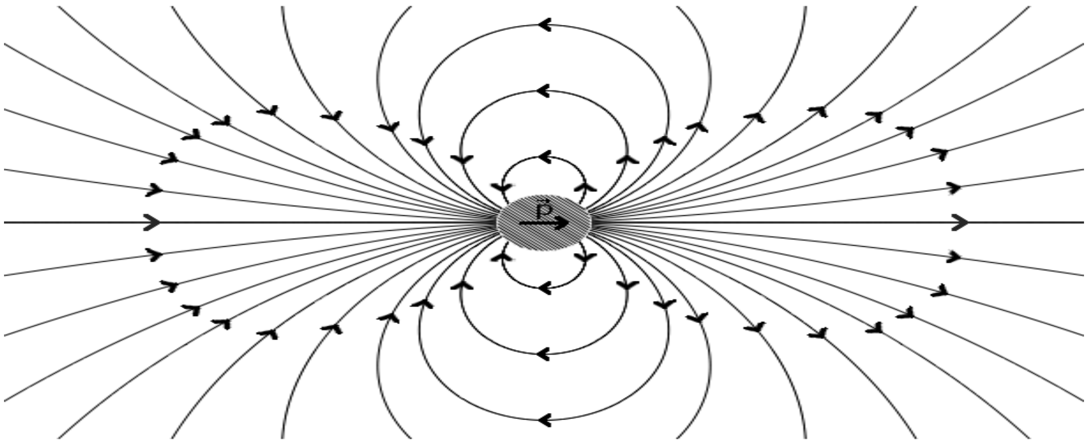
$$\int . \Leftarrow \frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta d\theta}{\sin\theta} = \frac{2d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\ln(r) = 2\ln(\sin\theta) + Cst$$

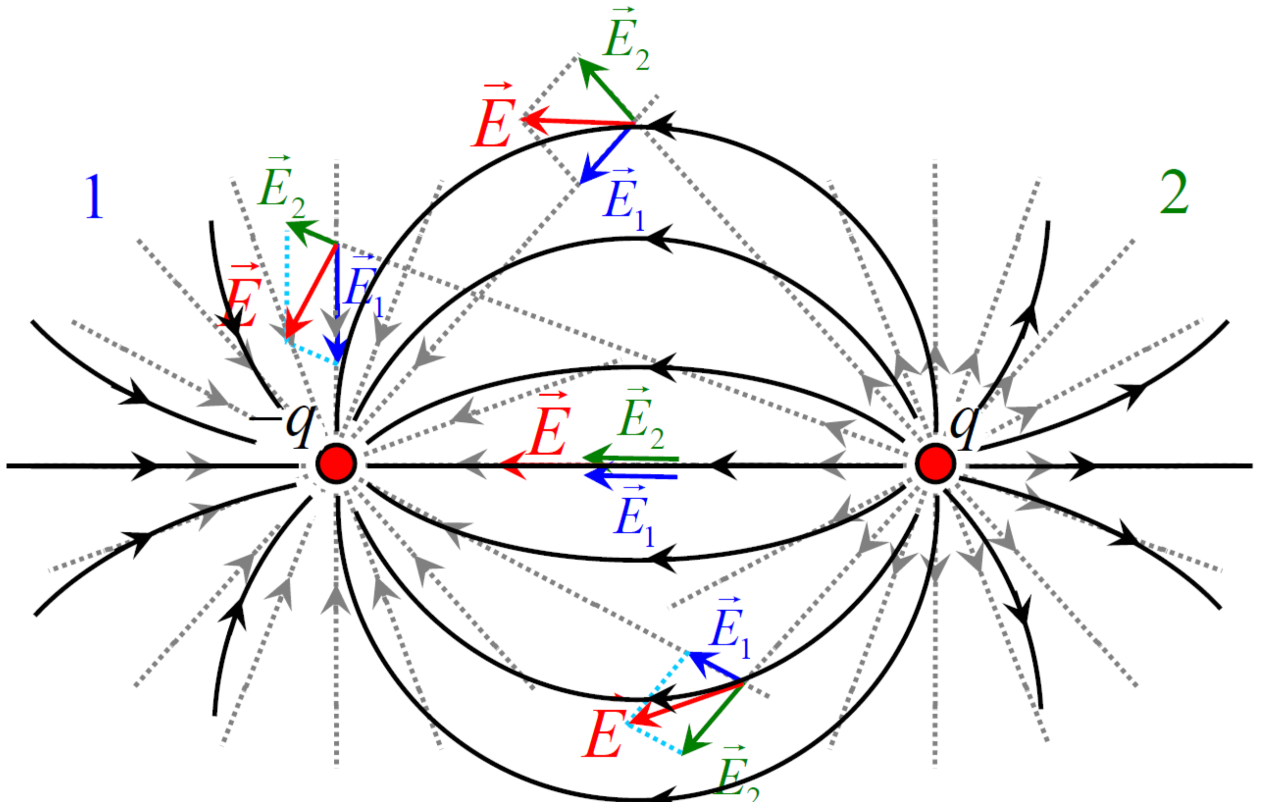
$$\searrow r = \frac{r_0 \sin\theta}{2}$$

Pour: $\theta = \frac{\pi}{2}, et\ r = r_0$

$$\begin{cases} x = r_0 \sin^2\theta\cos\theta \\ y = r_0 \sin^3\theta \end{cases}$$

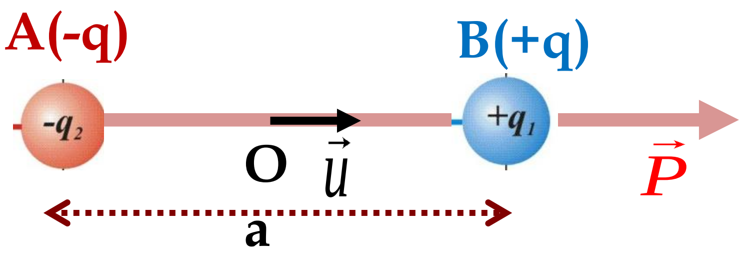


- Après séparation des variables et intégration on obtient:
- l'équation polaire des lignes de champ $r=r_o(\sin\theta)2$
- où r_o est un paramètre obtenu pour $\theta=\pi/2$
- les composantes de r suivant l'axe ox et oy sont données par ces deux équations.



Dipôle électrostatique placé dans un champ électrique uniforme

Énergie potentielle d'un dipôle électrique



$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \vec{E}.\overrightarrow{AB}$$

$$\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = \int_A^B -dV = -(V_B - V_A) = (V_A - V_B) = \vec{E}.\overrightarrow{AB}$$

$$E_P = q_A V_A + q_B V_B = q(V_B - V_A)$$

$$\vec{P} = q.\overrightarrow{AB}$$

$$E_P = q(V_B - V_A) = -q\vec{E}.\overrightarrow{AB} = -\vec{P}.\vec{E}$$

$$\boxed{E_P = -\vec{P}.\vec{E}}$$

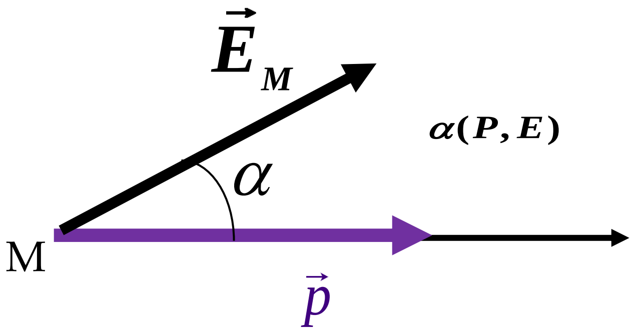
L’expression de l´énergie potentielle électrostatique Ep d’un dipôle rigide dans un champ E intervient souvent dans de nombreux domaines de la physique. Elle permet notamment de prédire l’évolution d’un dipôle placé dans un champ électrostatique.

Le dipôle P=qAB a ses deux charges –q en A et +q en B qui, dans le cas général, ne sont pas au même potentiel. Il est alors possible d’écrire pour l’énergie totale du dipôle dans le champ extérieur.

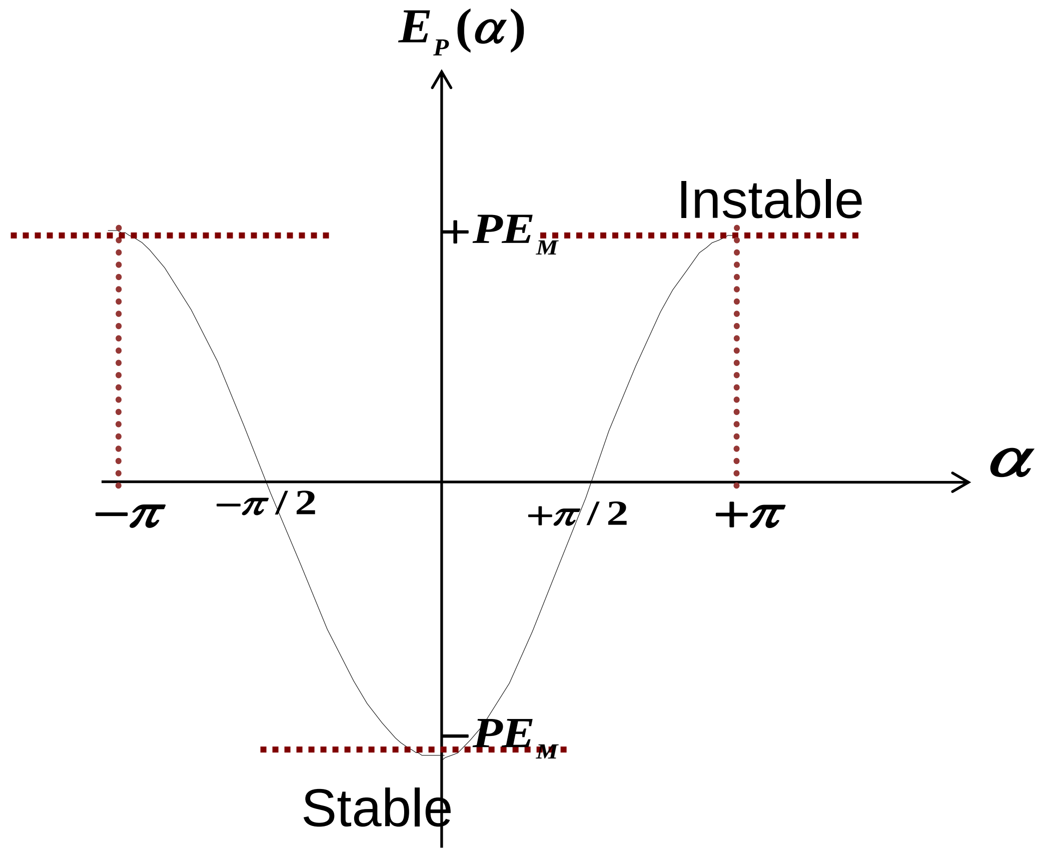
La différence de potentiel entre les points A et B peut se calculer par la circulation du champ électrique. Il vient alors l’expression de l’énergie cherchée

Dipôle électrostatique placé dans un champ électrique uniforme

Énergie potentielle d'un dipôle électrique



$$E_P = -PE_M \cos\alpha$$

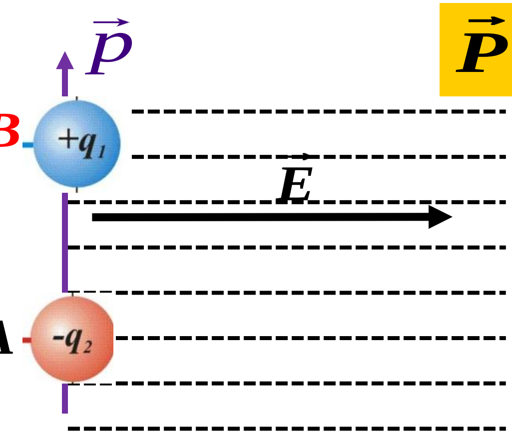


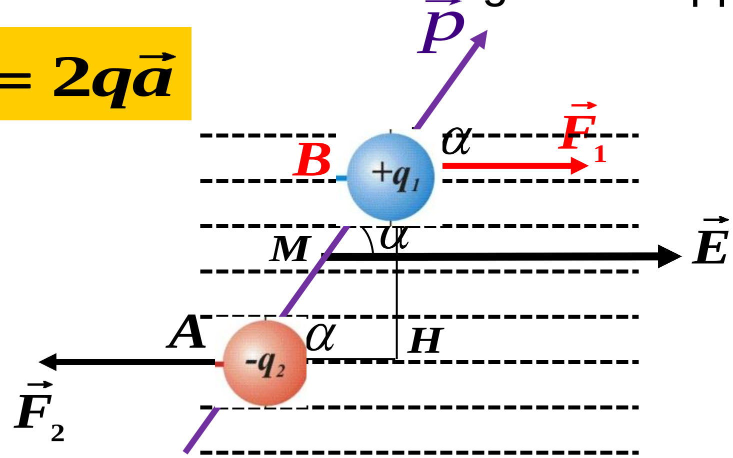
Dipôle électrostatique placé dans un champ électrique uniforme

Couple.

Si on place un dipôle, de moment électrique $\vec{P}$, dans un champ extérieur $\vec{E}$ uniforme, les charges qui le constituent sont soumises à des forces égales et opposées. $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$$\vec{P} = q\overrightarrow{AB} = 2q\vec{a}$$





$\alpha(\vec{P},\vec{E})$

$AH = 2a\sin\alpha$

Le dipôle subit alors l'action d'un couple de module : $\vec{L}$

$$\left|\vec{L}\right| = F.AH = qE\,2a\sin\alpha = pE\sin\alpha = \left|\vec{P}\times\vec{E}\right|$$

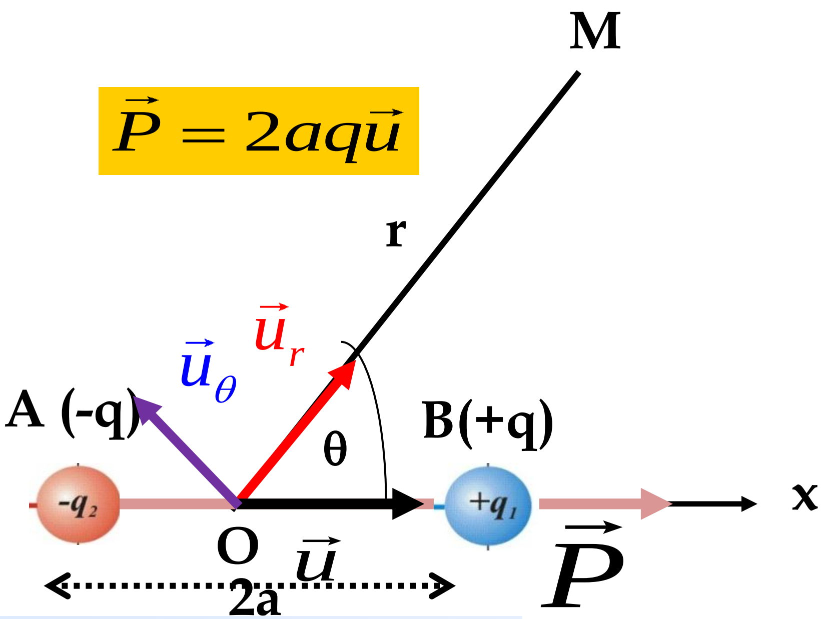
$$\vec{L} = \vec{P}\times\vec{E}$$

Résume sur le dipôle

Potentiel électrique créé par un dipôle électrostatique à grande distances

$$V(M) = \frac{kP\cos\theta}{r^2}$$

$$\vec{P} = 2aq\vec{u}$$



$$\vec{E}_M \begin{cases} E_r = -\dfrac{\delta V}{\delta r} = \dfrac{2kP\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\delta V}{\delta \theta} = \dfrac{kP\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

Dipôle électrostatique placé dans un champ électrique uniforme

Énergie potentielle d'un dipôle électrique

$$E_P = -\vec{P}.\vec{E}$$

Moment du couple – force agissant sur un dipôle:

$$\vec{L} = \vec{P} \times \vec{E}$$

Champ créé par une distribution continue de charges.

Lorsque la charge q est répartie sur un fil avec une densité linéique λ, chaque élément $d\ell$ porte une charge $dq = \lambda\, d\ell$, et crée un champ élémentaire :

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2}\vec{u} = \frac{K\lambda d\ell}{r^2}\vec{u}$$

le champ créé par q est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\ell}\frac{\lambda d\ell}{r^2}\vec{u}$$

Dans le cas d'une surface chargée avec une densité surfacique σ telle que $dq = \sigma\, dS$, on trouve de la même façon :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S}\frac{\sigma dS}{r^2}\vec{u}$$

De même dans le cas d'un volume V chargé avec une densité volumique ρdv telle que. $dq = \rho\, dv$ on obtient :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{v}\frac{\rho dv}{r^2}\vec{u}$$

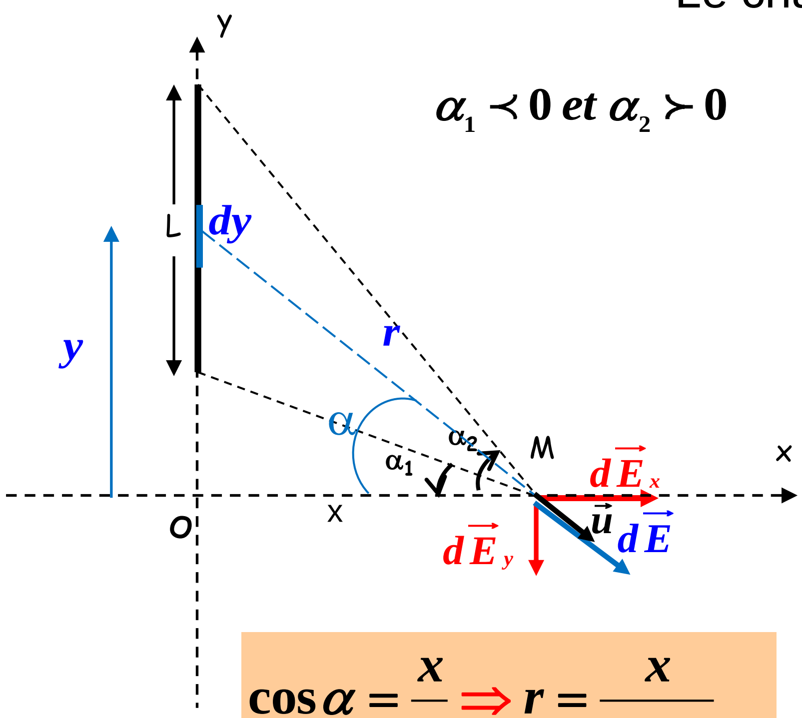
$d\ell$, dS et dv désignent respectivement les éléments de longueur, de surface et de volume.

Exemples champ et potentiel crées par des charges continues:

Fils chargé uniformément de densité λ (C/m)

$$dq = \lambda d\ell \ (C)$$

Champ crée par un fils infini à une distance x du fils



$$\alpha_1 \prec 0 \ et \ \alpha_2 \succ 0$$

Le champ crée par un élément dy au point M s'écrit:

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{r^2}\vec{u} = \frac{K\lambda dy}{r^2}\vec{u}$$

On décompose suivant ox et oy on obtient:

$$\vec{dE} = \begin{cases} dE_x = dE\cos\alpha \\ dE_y = -dE\sin\alpha \end{cases}$$

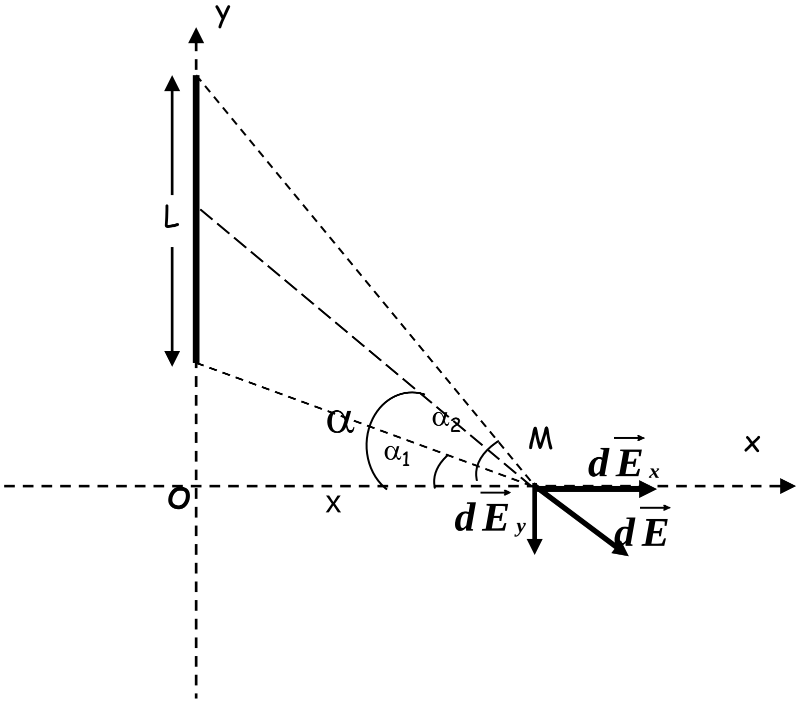
On exprime tout en fonction de l'angle α :

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xtg\alpha \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$dE = \frac{K\lambda dy}{r^2} = K\lambda\frac{xd\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{x^2} = K\lambda\frac{d\alpha}{x}$$

On obtient alors en remplaçant



$$\begin{cases} dE_x = dE\cos\alpha = \dfrac{K\lambda}{x}\cos\alpha\, d\alpha \\ dE_y = -dE\sin\alpha = -\dfrac{K\lambda}{x}\sin\alpha\, d\alpha \end{cases}$$

En intégrant entre α_1 et α_2 on a :

$$E_x = \frac{K\lambda}{x}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

$$E_y = \frac{K\lambda}{x}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

-Si le fil est infini , c'est-à-dire: $\alpha_1 = -\pi/2 \; et \; \alpha_2 = \pi/2$

On obtient: $\begin{cases} E_x = \dfrac{2K\lambda}{x} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \\ E_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda}{x}\vec{i}$

E est indépendant de la longueur du fils .

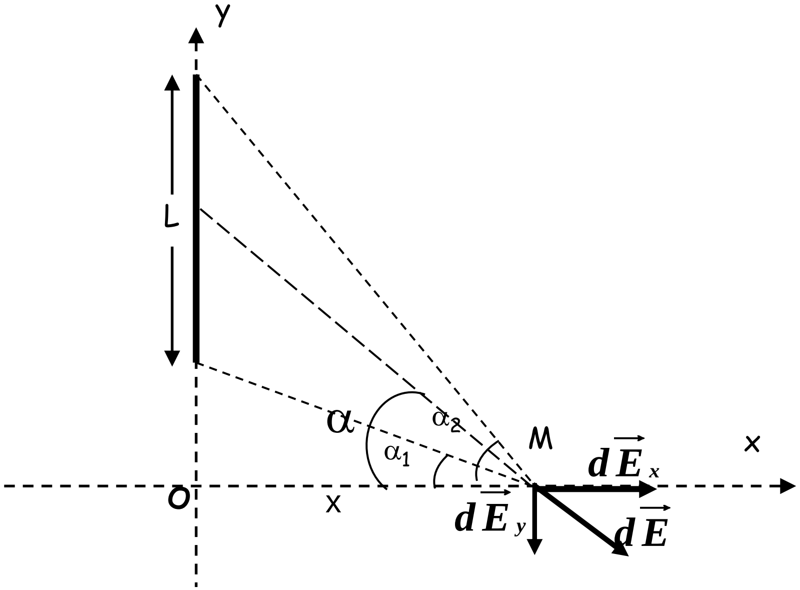
Potentiel crée par un fils infini à une distance x du fils

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E_x dx$$

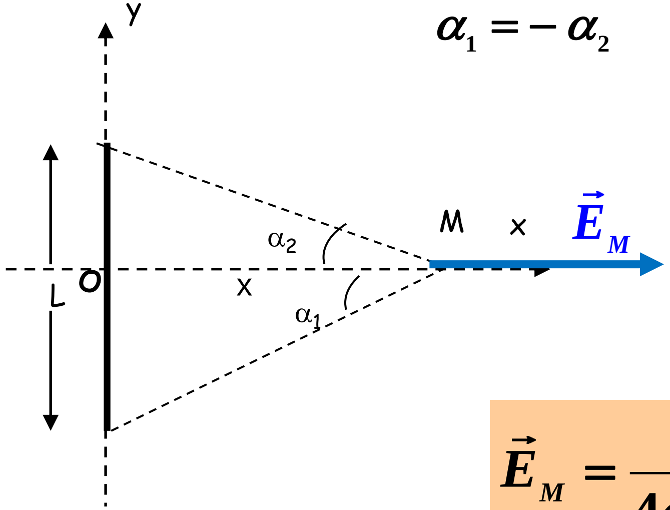
$$V = -\int \vec{E}.\vec{dl} = -\int E_x dx = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{x} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + Cte \qquad \boxed{V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + Cte}$$

Calcul directe du potentiel crée par un fils infini à une distance x du fils

$$dV = \frac{kdq}{r} = \frac{k\lambda dy}{r} = k\lambda\frac{\cos}{x}\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = k\lambda\frac{d\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \int dV = k\lambda\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$



$$\begin{cases} dE_x = dE\cos\alpha = \dfrac{K\lambda}{x}\cos\alpha \\ dE_y = -dE\sin\alpha = -\dfrac{K\lambda}{x}\sin\alpha \end{cases}$$



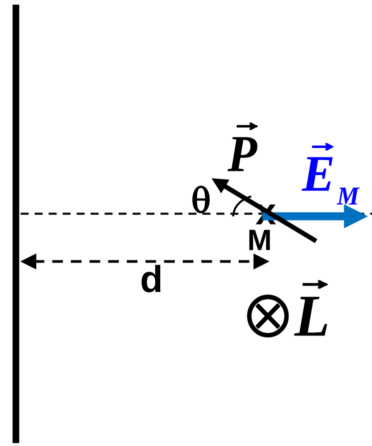
$$\alpha_1 = -\alpha_2 \qquad \sin\alpha_1 = -\frac{L/2}{\sqrt{x^2+(L/2)^2}}; \quad \sin\alpha_2 = \frac{L/2}{\sqrt{x^2+(L/2)^2}}$$

$$E_M = \frac{K\lambda}{x}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$\vec{E}_M = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\vec{i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{x\sqrt{x^2+(L/2)^2}}\vec{i}$$

Exercice 2.17

3-Au point M situé à une distance d du fil infini, on place un dipôle $\vec{P}$ mobile autour de son milieu et faisant un angle θ avec l'horizontale



a- Donner l'expression du moment du couple du dipôle placé dans le champ électrique du fil au point M.

$$\vec{E}_M = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{x}\vec{i}$$

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_M$$

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{p}\right|\left|\vec{E}_M\right|\sin(\pi - \theta)$$

$$\Rightarrow \vec{L} = -p\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\sin\theta\vec{k}$$

b-Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de ce dipôle.

$$E_{P_i} = -\vec{P}.\vec{E}_M = PE_M\cos\theta$$

$$E_{P_i} = p\frac{\lambda\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

$$E_{P_f} = p\frac{\lambda\cos\pi}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

c-Quel est le travail nécessaire pour que ce dipôle arrive à sa position d'équilibre stable

$$W_{\vec{L}} = -\Delta E_P = E_{P_i} - E_{P_f} = \frac{\lambda P}{2\pi\varepsilon_0 x}(\cos\theta - 1)$$

$$\vec{E}_M \begin{cases} E_x \\ 0 \\ 0 \end{cases} \qquad \vec{p} \begin{cases} p_x = -p\cos\theta \\ p_y = p\sin\theta \\ 0 \end{cases}$$

$$E_{P_i} = -P_x . E_x = PE_M \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{P_i} = p\frac{\lambda\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 x}}$$

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_M \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ P_x & P_y & 0 \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = -P_y E_x \vec{k} = -(p\sin\theta) E_M (+\vec{k})$$

$$\boxed{\vec{L} = -P\sin\theta \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}(+\vec{k})}$$

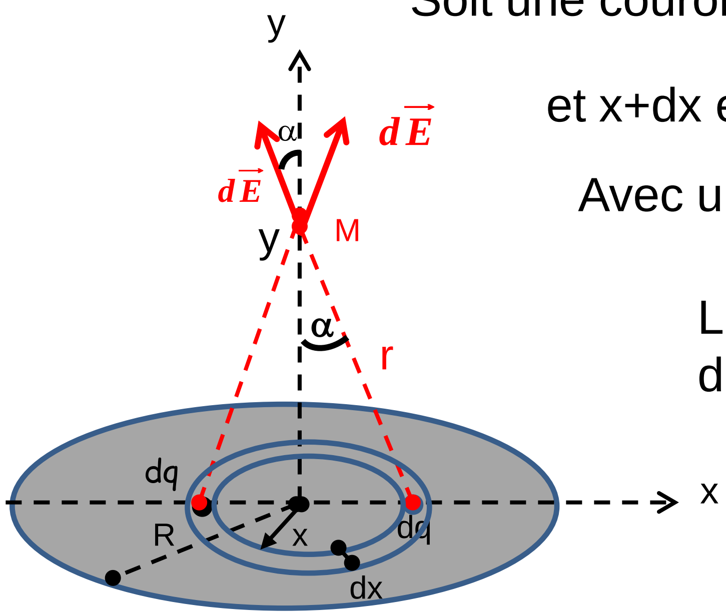
Disque de rayon R, chargé uniformément de densité σ (C/m^2)

champ crée par un disque uniformément chargé

Le champ crée par une charge dq=σds au point M d'abscisse y s'écrit:

$$\left|d\vec{E}\right| = \frac{Kdq}{r^2} = \frac{K\sigma ds}{r^2}$$

En prenant la symétrique à dq on obtient un autre champ, ce qui donne une composante globale suivant l'axe oy



Soit une couronne circulaire comprise entre deux cercles de rayon x et x+dx et portant les charges dQ:

Avec une surface: $dS = 2\pi x\, dx$

La contribution de toutes les charges élémentaires de cette couronne donne un champ élémentaire dE':

$$dE' = \frac{kdQ}{r^2} = \frac{k\sigma dS}{r^2} = \frac{k\sigma 2\pi x dx}{r^2}$$

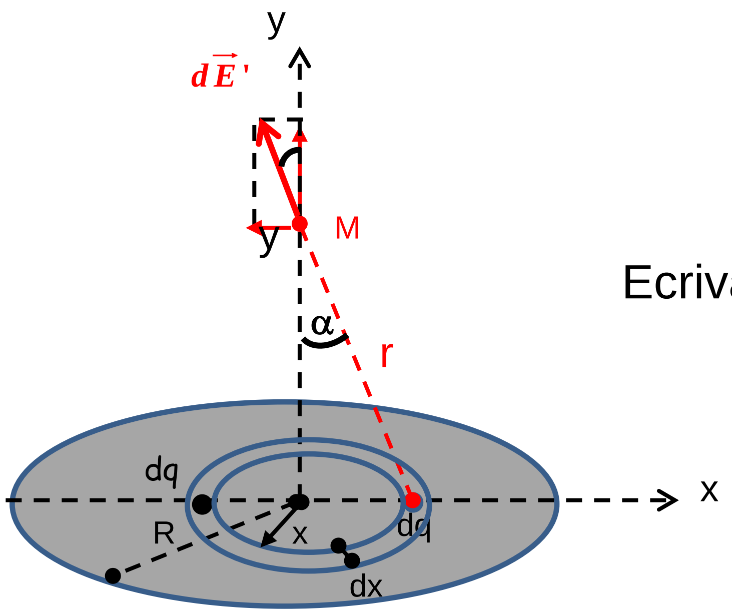
En décomposant les champs suivant ox et oy on constate que :

$$dE'_x = -dE' \sin\alpha \qquad dE'_y = dE' \cos\alpha$$

De plus, par raison de symétrie, la composante du champ total suivant ox est nulle

Donc le champ total créé par cette couronne est suivant oy et s'écrit:

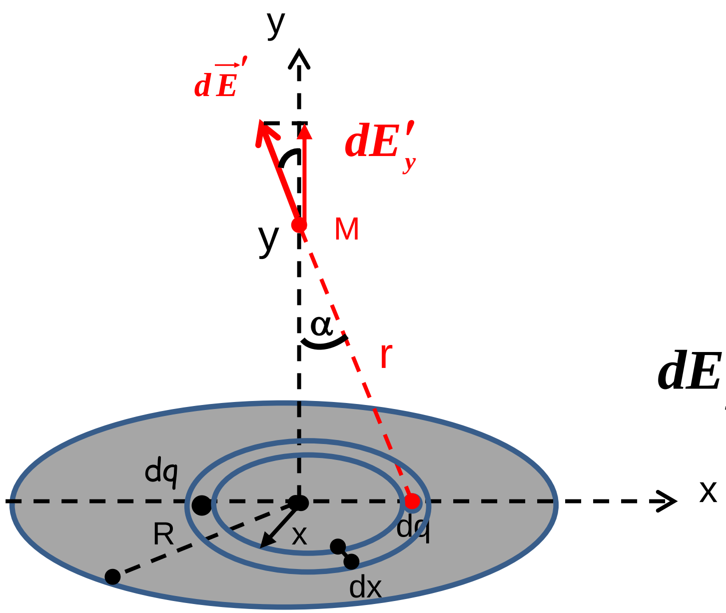
$$E' = \iint_S dE'_y$$



Ecrivant la composante du champ suivant oy

$$dE'_y = dE' \cos\alpha = \frac{k\sigma 2\pi x dx}{r^2} \cos\alpha$$

Exprimons cette composante en fonction d'une seule variable x qui varie entre 0 et R



$$r = \left(y^2 + x^2\right)^{1/2} \qquad \cos\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$dE'_y = \frac{k\sigma 2\pi x dx}{r^2}\cos\alpha = k\sigma 2\pi x dx \frac{1}{x^2 + y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$dE'_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{y x dx}{\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Le champ total suivant oy s'écrit donc: $$E' = \int_0^R dE'_y = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{x dx}{\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$E' = \int_0^R dE'_y = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{xdx}{\left(y^2+x^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\int_0^R \left(y^2+x^2\right)^{-3/2} xdx$$

$$\left(y^2+x^2\right)^{-3/2} \Rightarrow \left(y^2+x^2\right)^{-3/2+1} = \left(y^2+x^2\right)^{-1/2}$$

$$\left[\left(y^2+x^2\right)^{-1/2}\right]' = -\frac{1}{2}\left(y^2+x^2\right)^{-1/2-1} 2xdx = -\frac{xdx}{\left(y^2+x^2\right)^{3/2}}$$

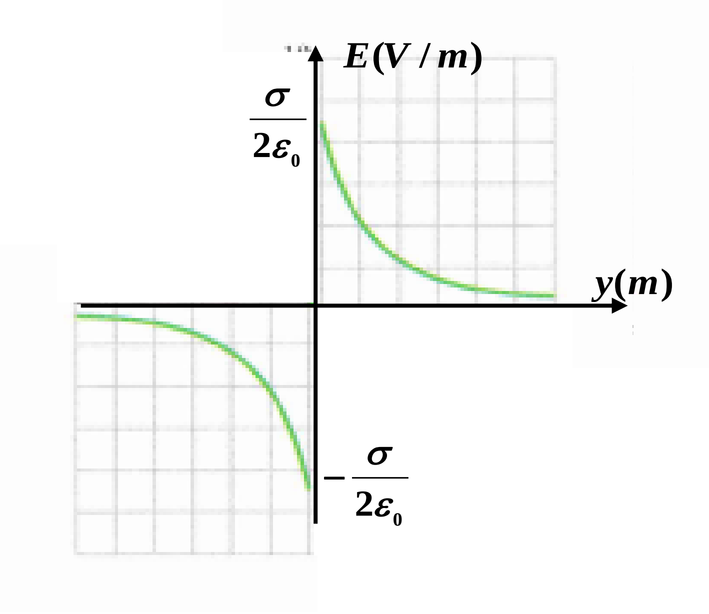
$$E' = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{xdx}{\left(y^2+x^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\left(y^2+x^2\right)^{1/2}}\right]_0^R \Rightarrow E' = \frac{\sigma y}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y^2+R^2)}}\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{y}{\sqrt{y^2}} - \frac{y}{\sqrt{(y^2+R^2)}}\right]\vec{j}}$$

On obtient alors deux champs :

Pour y > 0 on a: $\Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{y}{\sqrt{(y^2 + R^2)}}\right]$

Pour y < 0 on a : $\Rightarrow \quad E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 + \frac{y}{\sqrt{(y^2 + R^2)}}\right]$



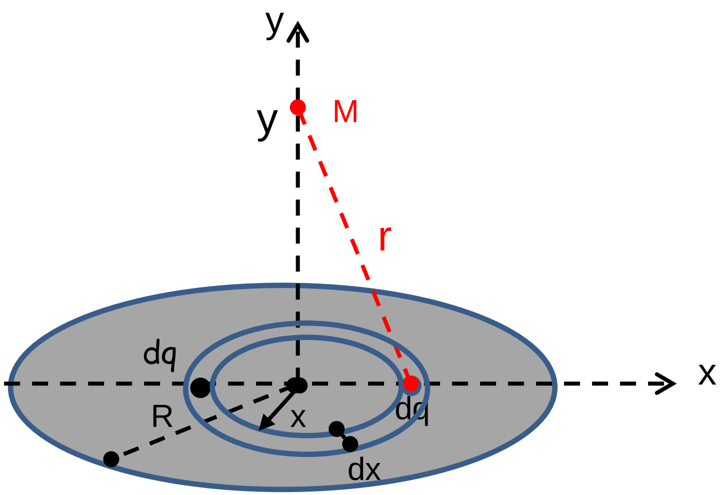
Potentiel crée par un disque uniformément chargé

A- Méthode directe:

$$dV = \frac{kdQ}{r} = \frac{k\sigma dS}{r}$$

On prend la même surface que pour le champ et exprime en fonction de x et y

$$dS = 2\pi x\, dx$$



$$r = \left(y^2 + x^2\right)^{1/2} \quad et \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Ce qui donne: $$dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{xdx}{\left(y^2 + x^2\right)^{1/2}}$$

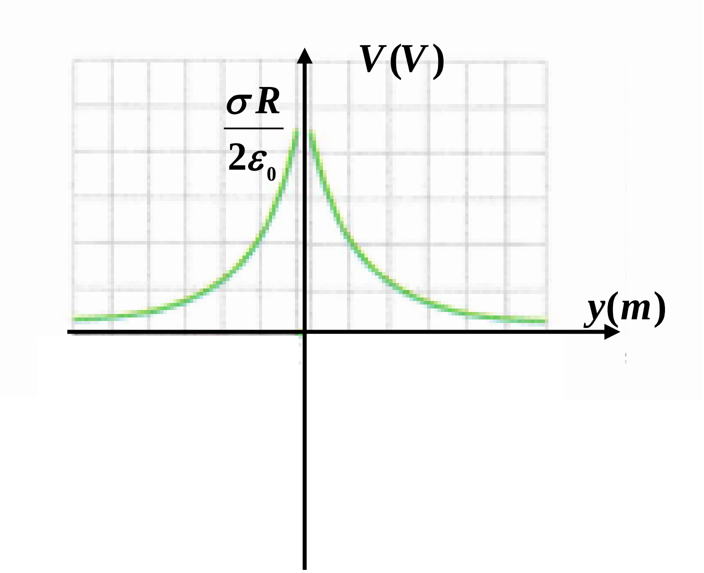
On intègre dV: $V(x) = \int dV = \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{x\,dx}{\left(y^2 + x^2\right)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{y^2 + x^2}\right]_0^R$

$$\boxed{V(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + y^2} - \sqrt{y^2}\right)}$$

On a donc deux potentiels :

Pour y > 0 on a:

$$\boxed{V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{(y^2 + R^2)} - |y|\right]}$$



Pour y < 0 on a :

$$\boxed{V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{(y^2 + R^2)} + |y|\right]}$$

B- Méthode à partir du champ électrique:

On prend uniquement le cas ou y est positif :

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edy$$

$$V = -\int Edy = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int\left[1 - \frac{y}{(y^2+R^2)^{1/2}}\right]dy$$

$$V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\int dy - \int \frac{ydy}{\sqrt{(y^2+R^2)}}\right]$$

En faisant le même changement de variables on obtient:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{(y^2+R^2)} - y\right] + cte$$

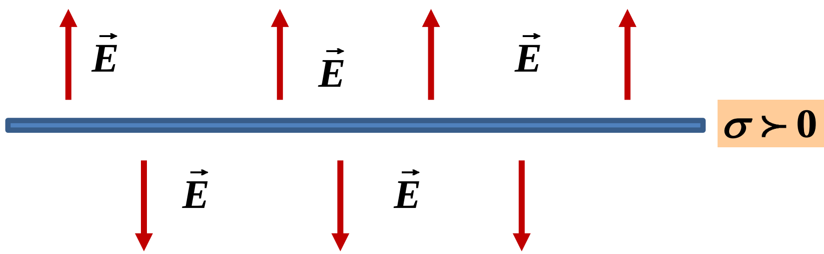
La constante s'annule en posant comme référence V(∞)=0

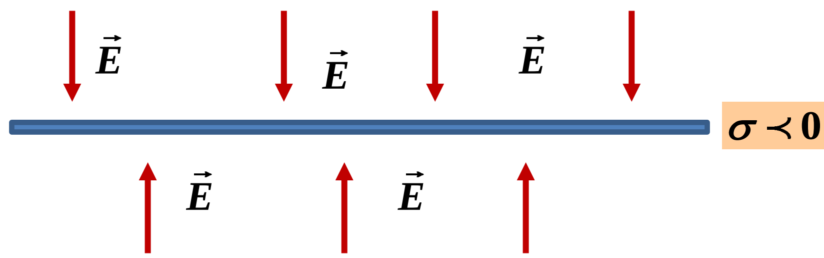
Cas particulier

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{y}{|y|} - \frac{y}{\sqrt{(y^2 + R^2)}}\right]\vec{j}$$

Si le rayon est très grand (R tend vers l'infini), le disque devient un plan infini

Le champ devient: $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ Il est indépendant de y





Le potentiel quand à lui devient:

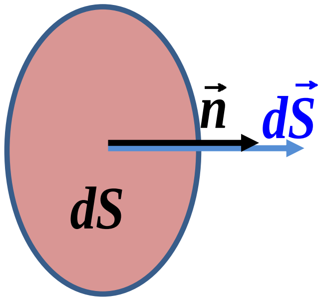
$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edy$$

$$V = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dy = -\frac{\sigma y}{2\varepsilon_0} + cte$$

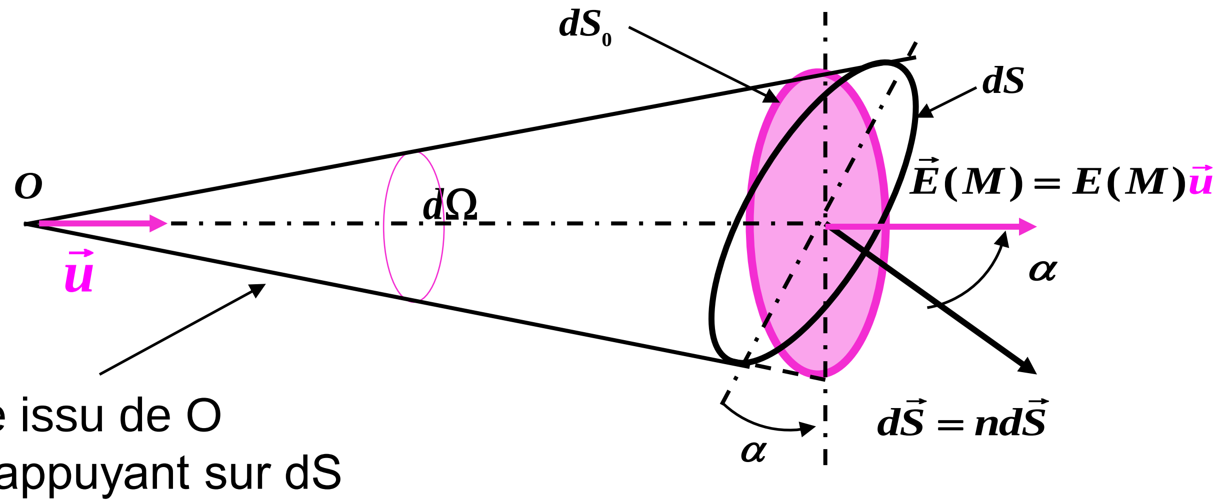
12- Théorème de Gauss

Friedrich
Gauss

Le vecteur élément de surface s'écrit en fonction du vecteur normal à la surface



$$d\vec{S} = dS\,\vec{n}$$



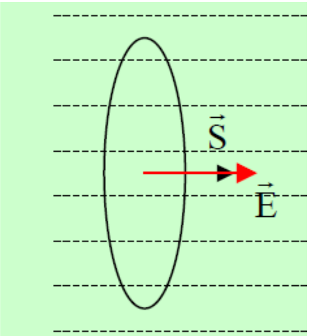
Angle solide

$$d\Omega = \frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2} = \frac{u.dS\cos\alpha}{r^2}$$

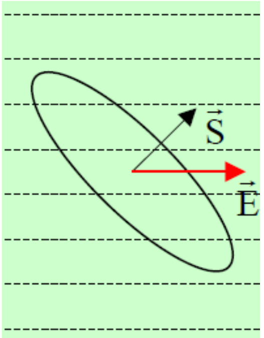
$$\Omega = \iint d\Omega = 4\pi$$

Flux du champ à travers une surface fermée

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} \qquad et \qquad \Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S}$$

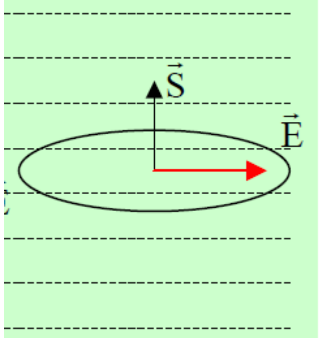


$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES$



$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$

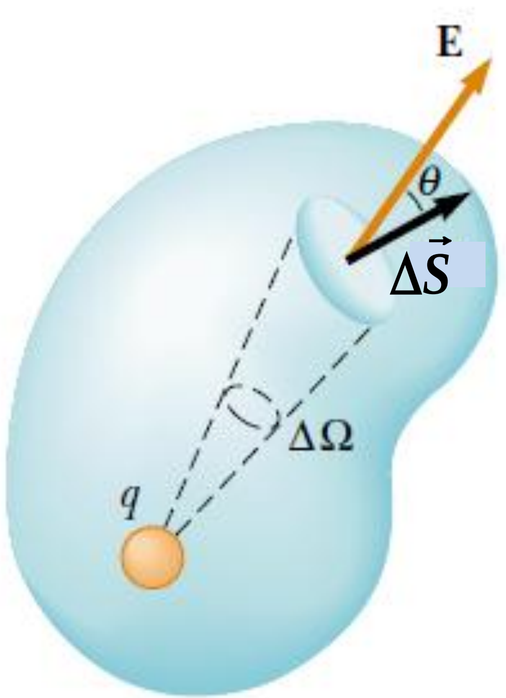
$= ES \cos 45°$



$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = 0$

Cas de charge q **à l'intérieur de la surface**

Le flux du champ crée par la charge q à travers la surface S est:



$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

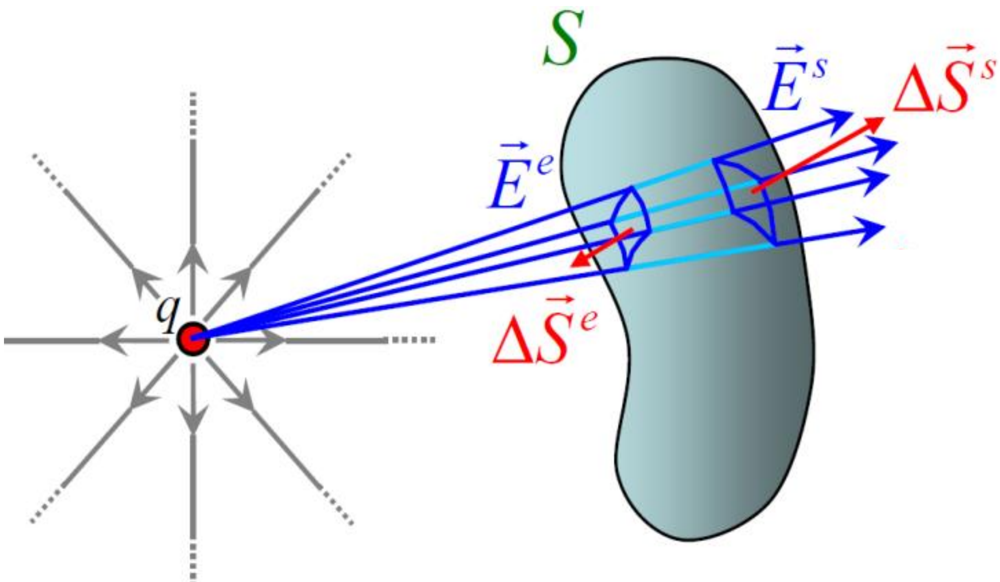
$$\Phi = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}.d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2}$$

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Cas de charge q **à l'extérieur de la surface**

Il y a deux flux puisqu'il deux surfaces dS^s et dS^e traversées par le champ de q

Flux à travers la surface: $s^s \Rightarrow \Phi_1$



Flux à travers la surface: $s^e \Rightarrow \Phi_2$

$$\Phi_1 = \iint \vec{E}.d\vec{S}^s = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint d\Omega$$

$$\Phi_2 = \iint \vec{E}'.d\vec{S}^e = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint d\Omega$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Enoncé du théorème de Gauss

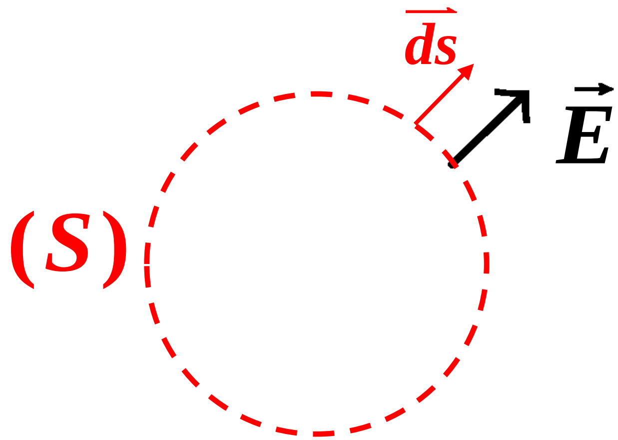
Le flux du champ électrique à travers la surface S fermée entourant des charges q est:

$$\boxed{\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

$$q_{int} \; sont\ les\ charges\ à\ l'\mathrm{int}érieur\ de\ la\ surface\ de\ Gauss$$

-S'il n'y a pas de charges à l'intérieur la surface fermée, ou si la somme algébrique des charges est nulle, le flux est nul.

-Les charges extérieures à la surface Gauss ne figurent pas dans l'expression du flux. (on évitera d' en conclure qu' elles ne contribuent pas au champ E en chaque point de la surface.)



$$E=\alpha r^{n}: \quad \textit{radial et const sur } (S)$$

$$\Phi=\iint \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \ \Phi=\iint E.dS = E\iint dS = ES = E4\pi r^{2}$$

$$\vec{E}\,//\,d\vec{S}$$

La méthode générale est la suivante:

-Trouver une surface fermée passant par le point M ou l' on désire calculer le champ.

-écrire la définition du flux: $\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S}$ étant le champ variable aux différents points de la surface.

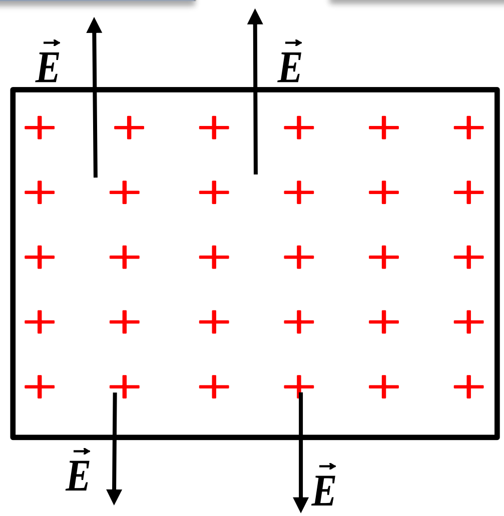
-appliquer le théorème de Gauss après avoir compté la charges algébrique totale intérieure à la surface.

Cette méthode n' est applicable que si l' expression de la définition du flux ne fait intervenir que le champ que l'on cherche à calculer $\vec{E}_M$

La surface fermée choisie doit être: **soit la ou** $\vec{E}_M = 0$ .Soit la ou $\vec{E}_M = Cst \; et \; \vec{E}_M // \vec{S}$. Soit la ou $\vec{E}_M \perp \vec{S}$.

Applications

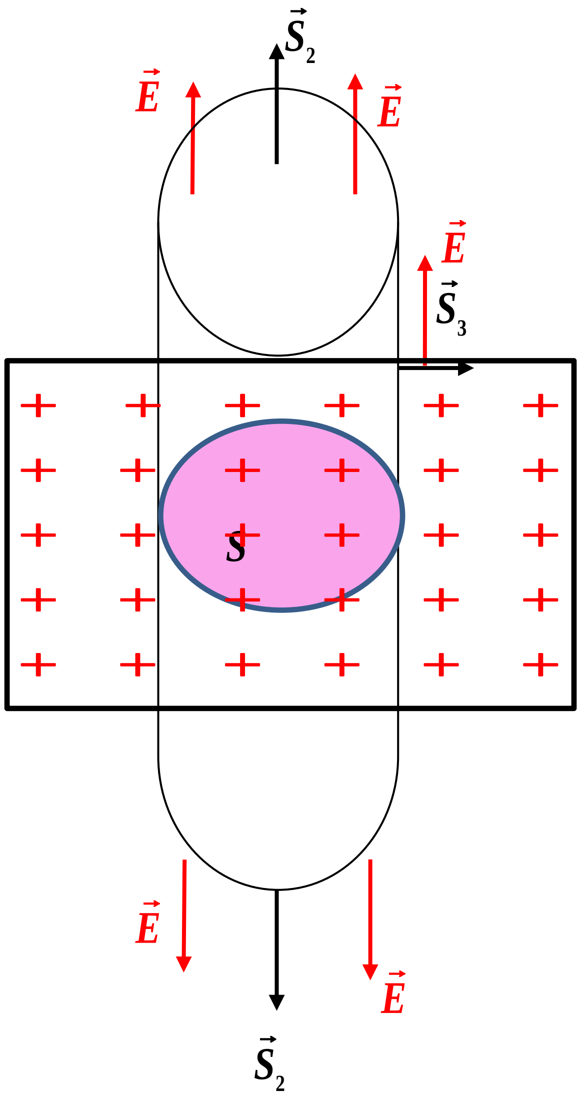
Charge distribuée uniformément sur un plan indéfini.

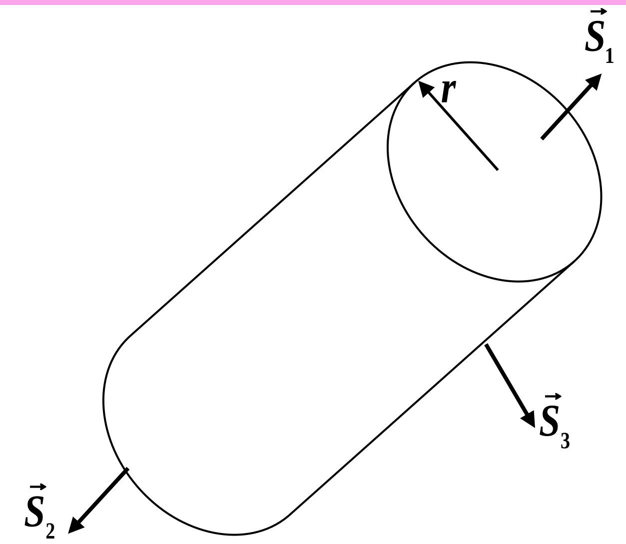


Le champ électrique est perpendiculaire au plan chargé

Champ électrique:

On choisie une surface fermée cylindrique de rayon r, formée de trois surfaces: S_1 , S_2 et S_3 .





Le cylindrique coupe le plan chargé en s: $q_s = \sigma S$

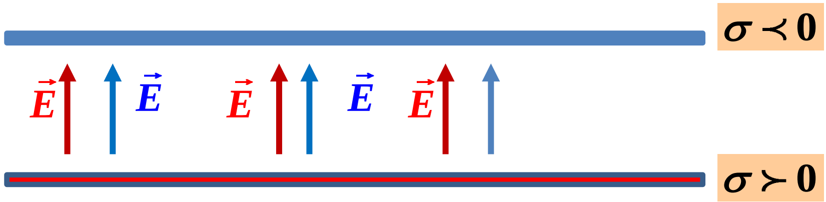
$$S_1 = S_2 = S$$

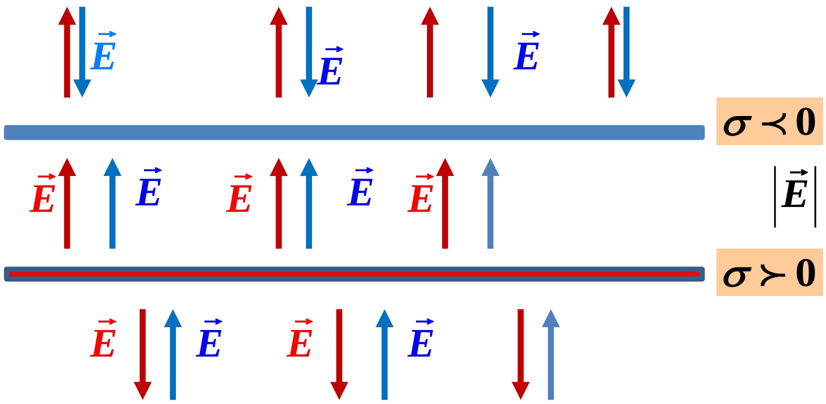
$$\sum q_{int} = \sigma S \qquad \Phi_{S1} = ES_1; \quad \Phi_{S2} = ES_2; \ \Phi_{S3} = 0$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_2 = 2ES = \frac{\sum q\,\mathrm{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

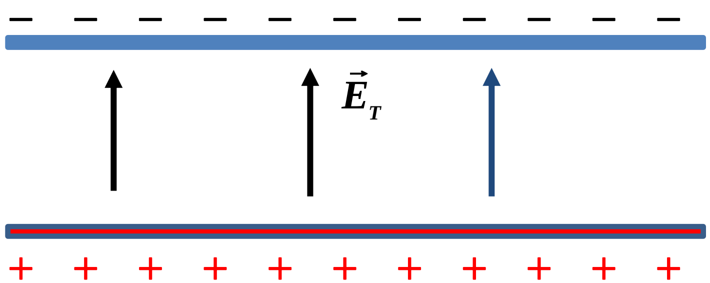
$$E == \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Voir diapo 44



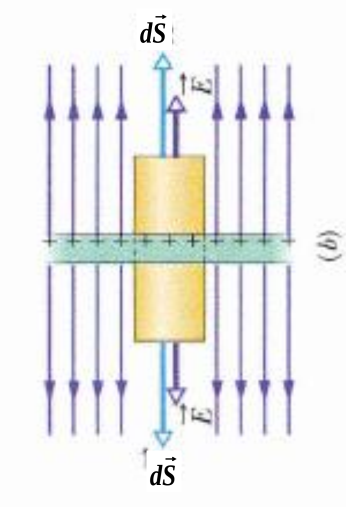


$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

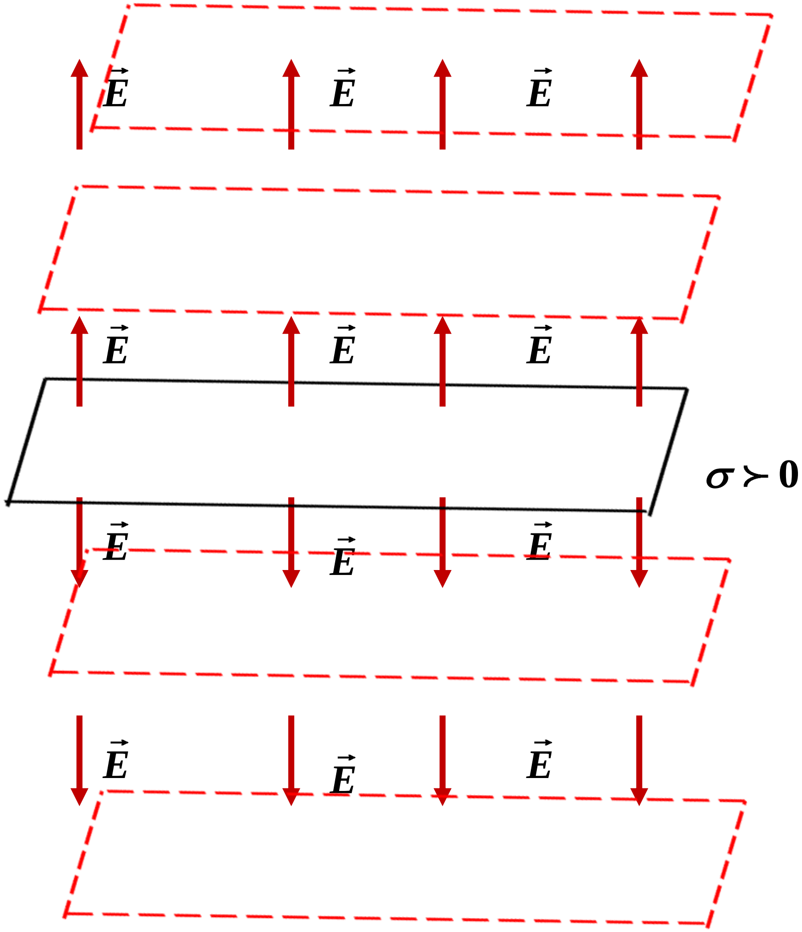


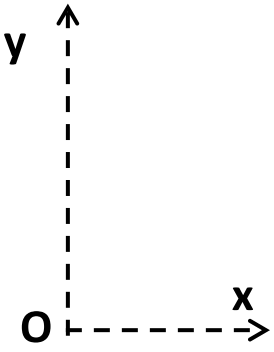
$$\left|\vec{E}_T\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Lignes de champ



Potentiel électrique:





La relation entre le champ électrique et le potentiel est (circulation da champ):

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edy$$

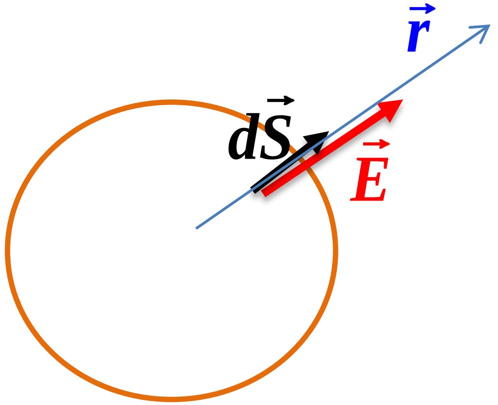
En intégrant suivant oy on obtient:

$$V = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dy = -\frac{\sigma y}{2\varepsilon_0} + cte$$

Les équipotentielles sont des plans parallèles au plan chargé et équidistants.

Sphère de rayon R uniformément chargé

Champ électrique:



Dans le cas d'une sphère chargée de rayon a ,
le champ électrique est **<u>radial</u>**.

La surface de Gauss choisie est une sphère de rayon r

Le flux du champ à travers cette surface s'écrit:

$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \iint E.dS$$

Le champ électrique est constant le long de la surface S

sphère de rayon r

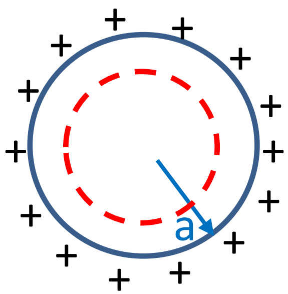
$$\boxed{\Phi = E\iint dS = ES = E\,4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi = E\,4\pi r^2}$$

a- Cas d'une distribution de charges en surface :

Considérons une sphère de **rayon a** et de charge Q :

Soit une surface de Gauss sphérique de rayon r tel que **r< a**

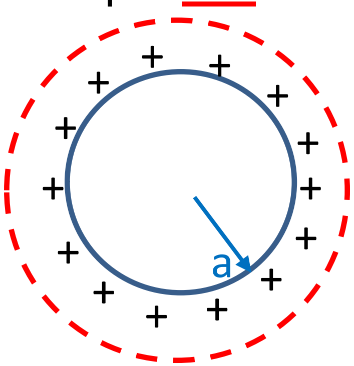
$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$



$$\sum q_{int} = \iint \sigma dS = 0 \Longrightarrow ES = 0$$

$$\boxed{E = 0}$$

Soit une surface de Gauss sphérique de rayon r tel que **r>a**

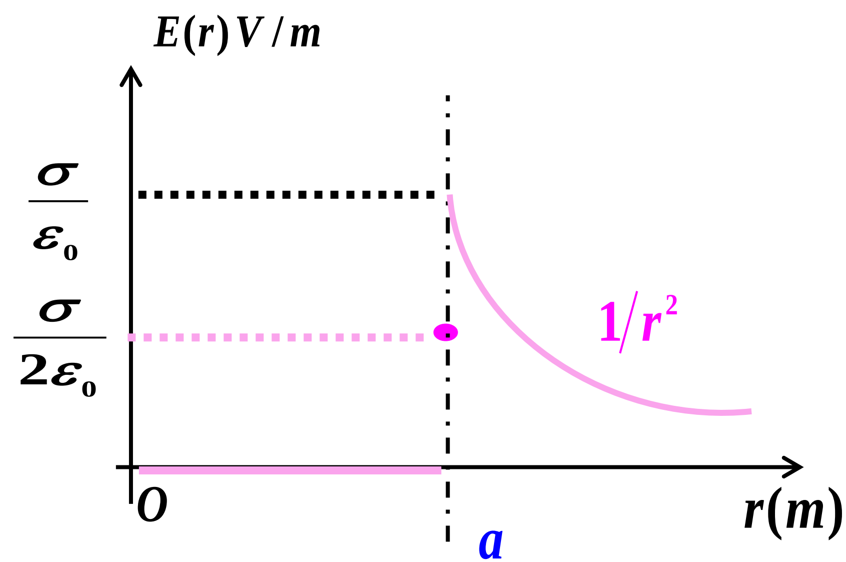


$$\sum q_{int} = \iint \sigma dS = \sigma S = Q$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{Q}{r^2}} \Longrightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^2}}$$

Répartition surfacique



Potentiel électrique:

La relation entre le champ électrique et le potentiel est:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{l} = -Edr$$

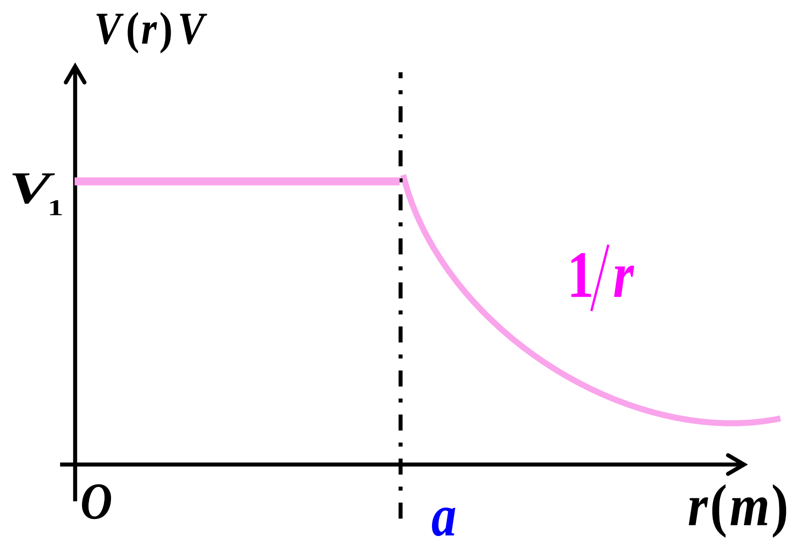
r< a $\quad E_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = C_1$

r> a $\quad V_2 = -\int E_2 dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$

$$\downarrow$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2$$

Répartition surfacique



Conditions aux limites:

$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

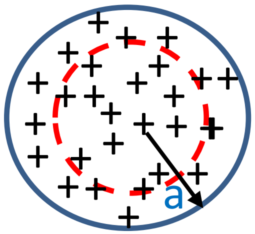
$V_1(a) = V_2(a) \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} a}$

b- Cas d'une distribution de charges en volume :

Considérons une sphère de **rayon a** chargée (Q) en volume de densité ρ_0=constante :

Soit une surface de Gauss sphérique de rayon r tel que **r< a**

$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

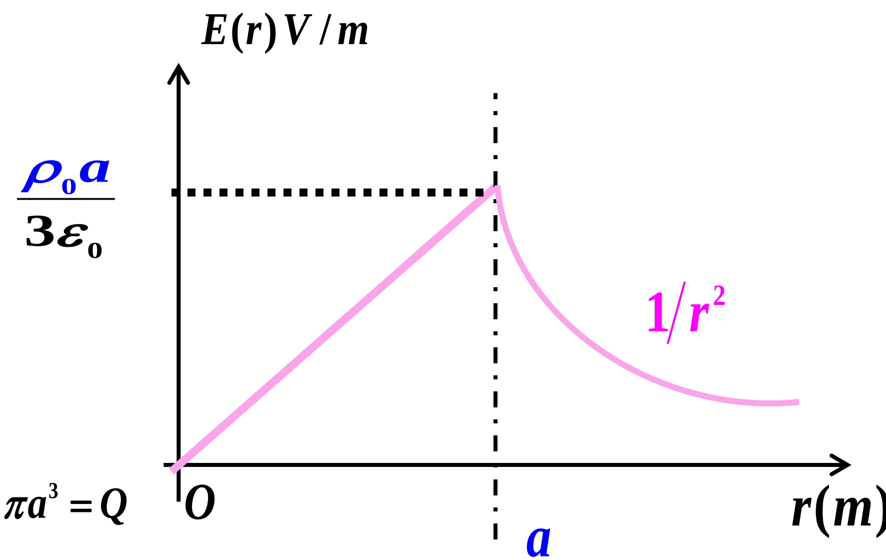


$$\sum q_{int} = \iiint \rho_0 dV = \rho_0 \int_0^r dV \quad \Rightarrow \quad \sum q_{int} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$$

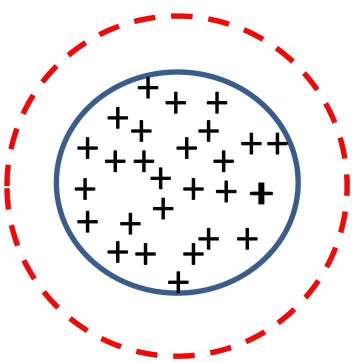
$$E\,4\pi r^2 = \rho_0 \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r^3$$

$$\boxed{E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r}$$

Répartition volumique



Soit une surface de Gauss sphérique de rayon r tel que **r> a**



$$\sum q_{int} = \iiint \rho_0 dV = \rho_0 \int_0^a dV \qquad \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi a^3 = Q$$

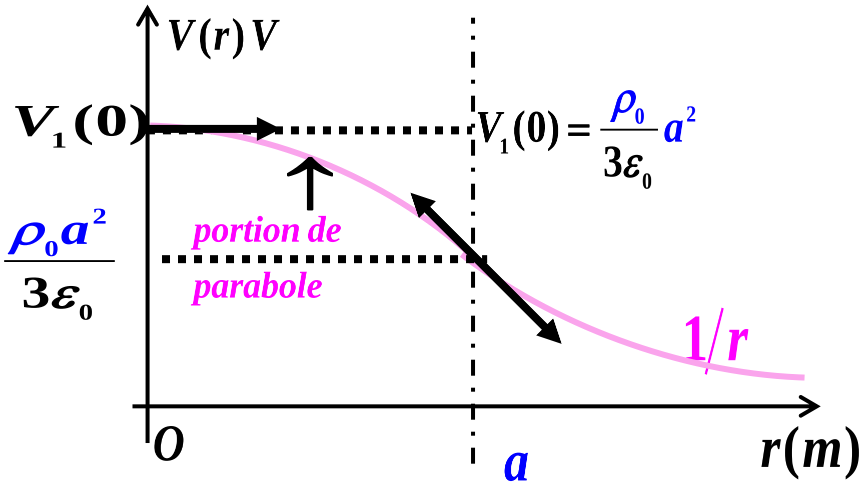
$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

Potentiel électrique:

La relation entre le champ électrique et le potentiel est:

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -Edr$$

Répartition volumique



<u>r< a</u> $E_1 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r \Rightarrow V_1 = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1$

<u>r> a</u> $V_2 = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} + C_2$

Conditions aux limites:

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_2 = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r}}$$

$$V_1(a) = V_2(a) \Rightarrow C_1 = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_1 = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{r^2}{3} + a^2\right)}$$

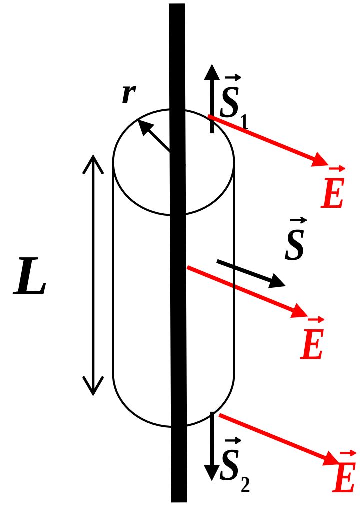
Fil infini uniformément chargé

Champ électrique:

Le champ électrique, dans ce cas, est radial

La surface de Gauss choisie est un cylindre de rayon r

Le flux du champ à travers cette surface s'écrit:



$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \iint E.dS \Rightarrow \Phi = E\iint dS = ES = E\ 2\pi rL$$

$$\vec{S}_1 \perp \vec{E} \text{ et } \vec{S}_2 \perp \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \phi_{S_1} = \phi_{S_2} = 0$$

Les charges à l'intérieur de la surface de Gauss sont: $\sum q_{\text{int}} = \int \lambda d\ell = \lambda L = Q$

$$\Phi = \iint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E\,2\pi rL = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

Potentiel électrique:

La relation entre le champ électrique et le potentiel est:

$$dV = -\vec{E}.d\vec{\ell} = -Edr$$

En intégrant en fonction de r on obtient:

$$V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + Cte$$