Chapitre V

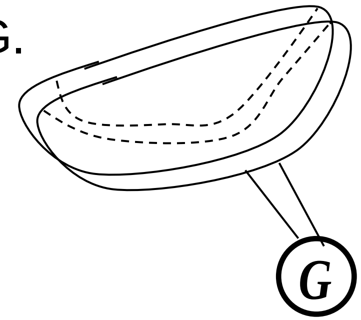
L’INDUCTION ELECTROMAGNÉTIQUE

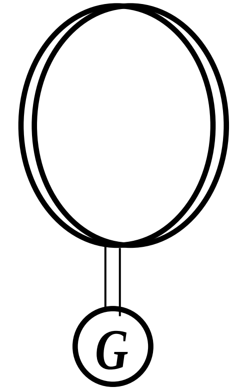
Nous n’avons considéré, jusqu’à présent, que des régimes stationnaires : en électrostatique et dans le cas des courants continus. La variation, en fonction du temps, des charges sources entraîne un phénomène de propagation des champs, il en résulte des effets de capacité entre conducteurs et une modification du théorème d’Ampère1. Lorsque cette variation est lente, c'est-à-dire lorsque les dimensions des circuits électriques sont très faibles par rapport aux longueurs d’onde qui interviennent dans la propagation2, on peut considérer que le courant électrique est, à un instant donné, le même le long de tout le circuit. En outre, les effets de capacité sont localisés à la surface des armatures des condensateurs : c’est le cas des ”régimes quasi stationnaires” que nous allons considérer dans les deux chapitres qui suivent.

Par A.DIB

1..Description des phénomènes d’**induction: mise en évidence de courants induits.**

Expérience 1 Une bobine de fil souple déformable est placée dans un champ magnétique terrestre et comporte dans son circuit un galvanomètre G.



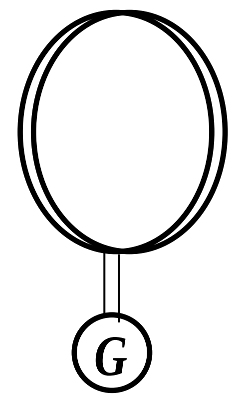


-On déforme la géométrie des spires: un courant apparait; Le sens du courant est différant selon que la surface du circuit augmente ou diminue.

-Le courant ne circule que pendant le temps qui correspond à la déformation; il dépend de la vitesse à laquelle est réalisée cette déformation et s’annule dés que le circuit devient immobile.

Expérience 2

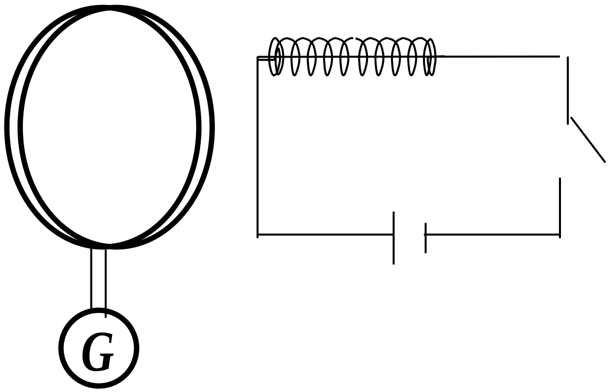
Le circuit restant fixe, les mêmes phénomènes apparaitrons si on approche ou on éloigne un aimant de lui.



On obtiendrait les mêmes phénomènes en remplaçant l’aimant par un circuit mobile parcouru par courant

Expérience 3

On remplace maintenant l'aimant par un circuit fixe comportant un générateur une bobine et un interrupteur. On ferme l' interrupteur:: un courant temporaire circule dans le circuit. A la réouverture de l' interrupteur apparait un courant en sens inverse.

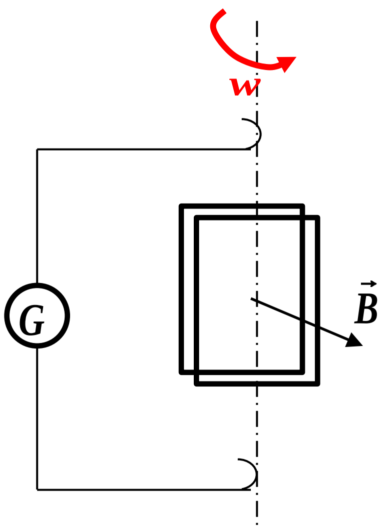


Si on inverse les bornes du générateur, les phénomènes précédant sont inversés.

Expérience 4

Un circuit rigide tournant à vitesse constante dans un champ magnétique constant est parcouru par courant alternatif de même fréquence.

Un cadre rectangulaire, constitué de N spires conductrices, peut tourner librement autour d'un axe verticale dans une région ou règne un champ magnétique $\vec{B}$ (figure). Ses deux extrémités sont reliées à des bagues solidaires de l'axe de rotation. Sur ces bagues viennent frotter deux électrodes (balais) qui constituent les extrémités d'un circuit comportant un galvanomètre G. La rotation du cadre entraîne l'apparition d'un courant dans le galvanomètre. Le sens du courant induit est tel que les forces qu'il crée s'opposent à la rotation du cadre



2. Lois de l'induction.

Toutes ces expériences ont mis en évidence l'apparition d'un courant dans un circuit qui ne comporte aucun générateur. Ces courants résultent de la naissance d'une force électromotrice induite e. Selon le cas, on remarque que le sens et la grandeur du courant dépendent de la variation, en fonction du temps,

- de la surface du circuit .
- du champ magnétique dans lequel est plongé le circuit (expériences 2).
- de l'orientation du circuit par rapport au champ magnétique (expérience 4).

Par consequent :

1°) Chaque fois que le flux magnétique ϕ , qui traverse un circuit, varie, une force électromotrice e prend naissance dans le circuit. Sa durée Δt est égale à celle de la variation du flux $\Delta\phi$.

2°) Le sens du courant induit est tel que les forces électromagnétiques, qui en résultent, s'opposent à la cause qui a créé ce courant. C'est la loi de Lenz.

3°) La force électromotrice induite, e, est égale et opposée à la vitesse de variation du flux magnétique à travers la surface du circuit et s'écrit :

$$e = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

La f. é.m instantanée est : $$e = -\frac{d\Phi}{d t}$$

I I -V-LOIS DE LENZ- FARADAY.

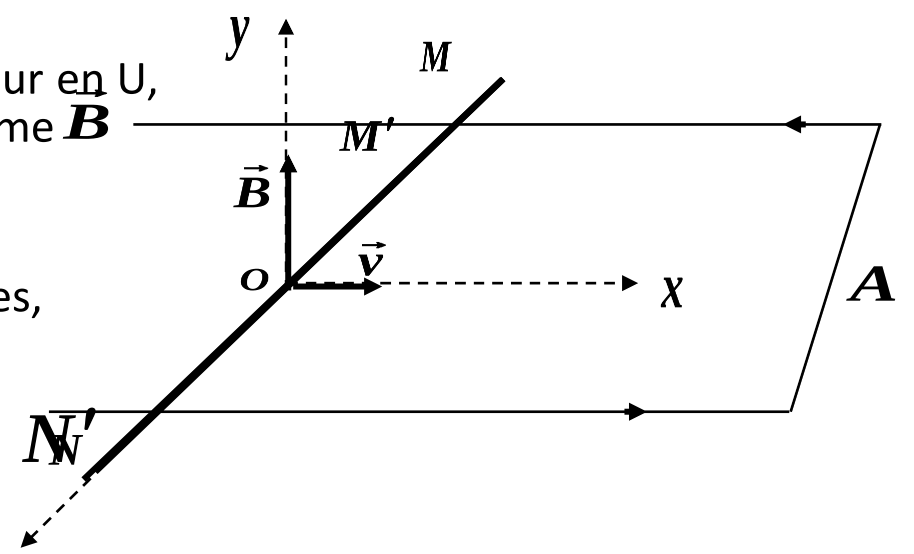
Nous avons déjà vu, au chapitre précédant, qu'un courant électrique peut engendrer un champ magnétique. D'un autre côté, les expériences, que nous venons de décrire, montrent qu'un champ magnétique peut induire, sous certaines conditions, un courant dans un circuit électrique. La loi de Faraday donne le module de la force électromotrice induite e et la loi de Lenz précise son signe. Nous allons, dans ce qui suit, démontrer la loi de Lenz-Faraday dans un cas particulier.

1. Cas d'un circuit fermé placé dans un champ constant et uniforme

On considère un circuit fermé, formé d'une barre métallique MN qui se déplace sur un rail conducteur en U, placé dans un champ magnétique constant uniforme $\vec{B}$ et perpendiculaire au plan du circuit.

La tige conductrice MN se déplace à la vitesse $\vec{v}$

Il en résulte un déplacement de charges électriques, le long de la tige, à la vitesse $\vec{v}_q$.



La vitesse d'une charge q par rapport au champ est : $\vec{v}_T = \vec{v} + \vec{v}_q$

Le déplacement de charges électriques, le long de la tige nous donne un courant i

Elle est soumise à la force de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{v}_T \times \vec{B} = q\left(\vec{v} + \vec{v}_q\right) \times \vec{B}$

Lors d'un déplacement $\overrightarrow{dz}$ de la charge q à travers la tige, le travail de la force $\vec{F}$ est :

$$dw = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dz} = q\vec{v}_T \times \vec{B} = \left(q\left(\vec{v} + \vec{v}_q\right) \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dz}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Or } \vec{v}_q \text{ est parallèle à } \overrightarrow{dz} \text{ par conséquent : } dw = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dz} \\ \text{Ce travail équivaut à celui qui est produit par une force} \\ \text{électromotrice élémentaire "de" telle que : } dw = qde\end{array}\right\} \rightarrow de = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dz}$$

$\vec{v}$ est la vitesse de déplacement de la tige MN. $\vec{v} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$

dx est le déplacement élémentaire de la tige le long des rails. L'équation (8) devient :

$$de = \frac{1}{dt}\left[\left(d\vec{x} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dz}\right] \quad \text{soit} \quad de = -\frac{1}{dt}\left[\left(d\vec{x} \times \overrightarrow{dz}\right) \cdot \vec{B}\right]$$

La force électromotrice qui prend naissance aux extrémités de la tige mobile est :

$$e = -\frac{1}{dt}\left[\left(d\vec{x} \times d\vec{\ell}\right) \cdot \vec{B}\right]$$

En introduisant le flux coupé par la tige au cours de son déplacement :

$$d\Phi = \left(d\vec{x} \times d\vec{\ell}\right) \cdot \vec{B}$$

il vient : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ La loi de Lenz- Faraday est démontrée, ici, dans un cas particulier, mais elle est valable dans tous les cas.

2. Champ électromoteur.

L'expression de la force qui met les charges en mouvement: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Peut s'écrire : $\vec{F} = q\vec{E}_m$ Où $\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B}$ est le champ électromoteur.

Comme dans le cas des générateurs, on introduit un champ électromoteur qui est à l'origine de la force électromotrice.

Calculons la circulation du champ électromoteur le long d'un contour fermé. On prend comme contour C le circuit précédant, constitué de la tige MN et du conducteur en U.

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{\ell} = \int_M^N \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dz} + \int_{NAM} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{\ell}$$

La dernière intégrale est nulle car la vitesse est nulle, on peut écrire :

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_M^N de = e$$

La circulation du champ électromoteur le long de C est égale à e : elle n'est pas nulle, donc le champ électromoteur ne dérive pas d'un potentiel

$$\boxed{e = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}}$$

D'autre part, on sait que le champ électrostatique $\vec{E}_S$ dérive d'un potentiel, soit $\oint_C \vec{E}_S \cdot d\vec{\ell}$

Si on considère le champ électrique total : $\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_m$ on a $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = e$

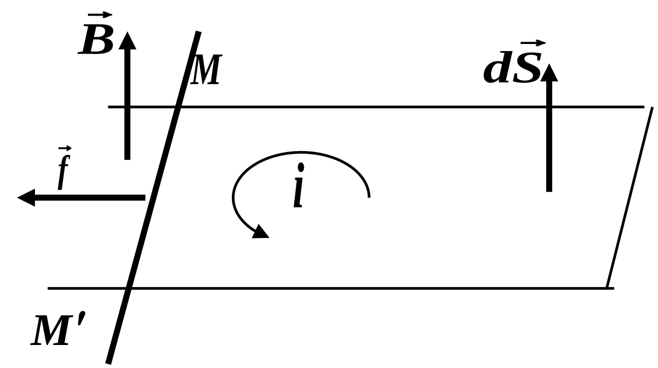
3. Loi de Lenz-Faraday en fonction de la vitesse

On peut également obtenir l'expression de la f.é.m. induite en faisant apparaître la vitesse de déplacement de la tige :

$$e = \frac{\ell B\, dx}{d\,t} = \ell B \frac{dx}{d\,t} = \ell B v$$

Le signe de la force électromotrice e est donné par la loi de Lenz. La figure montre que le sens du courant est tel que la force F qu'il crée s'oppose au mouvement.

Le conducteur métallique MM' parcouru par un courant, placer dans un champ magnétique, est soumis à une force de Laplace: $\vec{f} = i\,\overrightarrow{MM'} \times \vec{B}$



$$\Delta\Phi = BS_f - BS_i = -B\ell\Delta x$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell\frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

4. Equation de Maxwell-Faraday

Dans l'exemple précédent , C est un circuit électrique dont la surface varie et qui est placé dans un champ constant. Ce circuit, constitué de conducteurs, existe physiquement.

Dans l'exemple précédent , C est un circuit électrique dont la surface varie et qui est placé dans un champ constant. Ce circuit, constitué de conducteurs, existe physiquement.

D'après la loi de Lenz- Faraday on a : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ soit $e = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

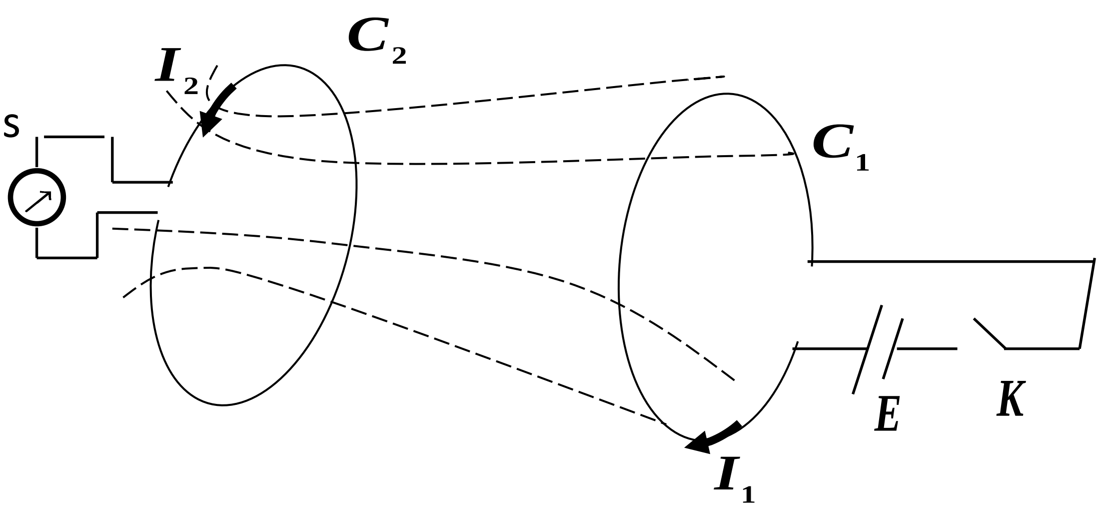
Considérons, à présent, une région de l'espace où règnent des champs variables $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$. On choisit un contour quelconque C et une surface arbitraire S s'appuyant sur ce contour. C n'est plus, dans ce cas, un circuit électrique, c'est une courbe fermée imaginaire. Comme S ne dépend pas ici du temps, l'équation s'écrit alors :

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S -\frac{\delta \vec{B}}{\delta x}\cdot d\vec{S}$$

C'est l'équation de Maxwell-Faraday.

III -MUTUELLE INDUCTION ET SELF INDUCTION.

Les deux circuits étant immobiles, le galvanomètre indique $i_2=0$. Fermons l'interrupteur K, un courant i_1 va circuler dans le circuit C_1, celui-ci envoie, à travers C_2, un flux magnétique : $\Phi = M i_1$



Au cours du temps dt que dure cette fermeture, le courant i_1 passe de 0 à i_1 maximum. Il en résulte, à travers C_2, une variation du flux $d\Phi$ et l'apparition d'une force électromotrice induite

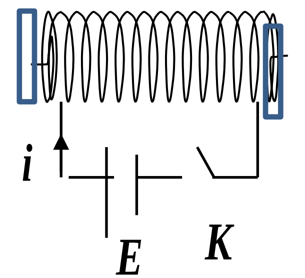
$$e_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} M i_1$$

Comme les deux circuits sont immobiles, M ne dépend pas du temps ; d'où $e_2 = -M \dfrac{di_1}{dt}$

De même, si on fait varier i_2 dans C_2, on constate, dans C_1, la naissance d'une f.é.m. induite : $e_1 = -M \dfrac{di_2}{dt}$

Le coefficient d'induction mutuelle M est le même dans ces deux expressions.

Considérons, à présent, une bobine, montée comme le montre la figure. Comme précédemment, lors de la fermeture ou de l'ouverture de l'interrupteur K, La bobine est traversée par un flux proportionnel à i $\Phi = Li$



La variation du courant i entraîne l'apparition d'une f.é.m induite : $e = -L \dfrac{di}{dt}$

L est l'inductance ou le coefficient de self induction de la bobine .

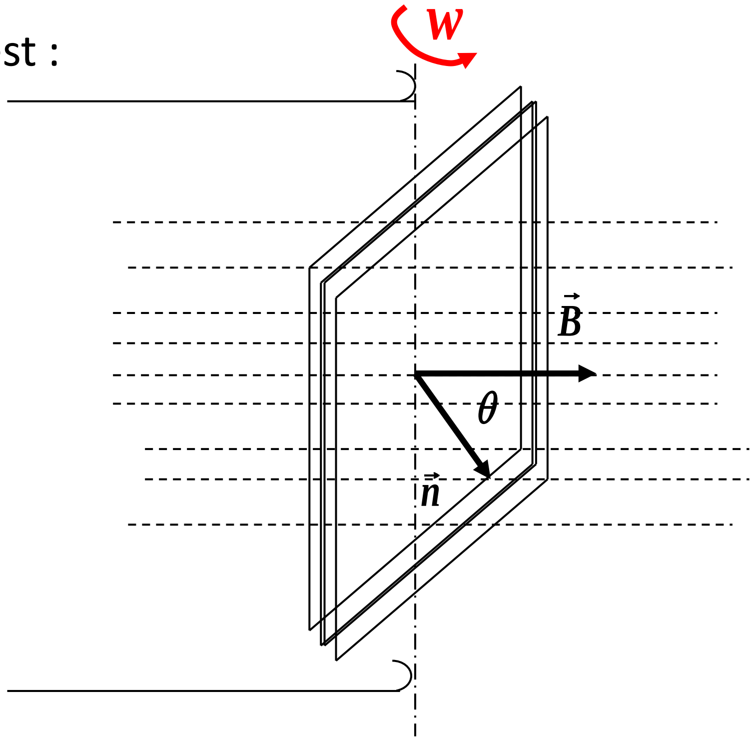
7. Calcul des forces appliquées à un circuit électrique.

I V - APPLICATIONS DES PHENOMENES D'INDUCTION

.1. Générateur de courant alternatif.

Une bobine, comportant N spires, tourne autour d'un axe z'z vertical, à la vitesse angulaire w constante, dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant. Le champ est perpendiculaire à z'z (figure). A l'instant t, la normale $\vec{n}$ à la bobine fait avec $\vec{B}$ un angle $\theta = wt$

Le flux magnétique embrassé à cet instant par la bobine est :



$$\Phi(t) = \Phi_M \cos\theta = wt \quad \Phi_M = NSB$$

Il en résulte dans la bobine une f.é.m induite :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = w\Phi_M \sin wt = E_M \sin wt$$

C'est le principe de l'alternateur monophasé.

2.La loi d'Ohm permet d'écrire

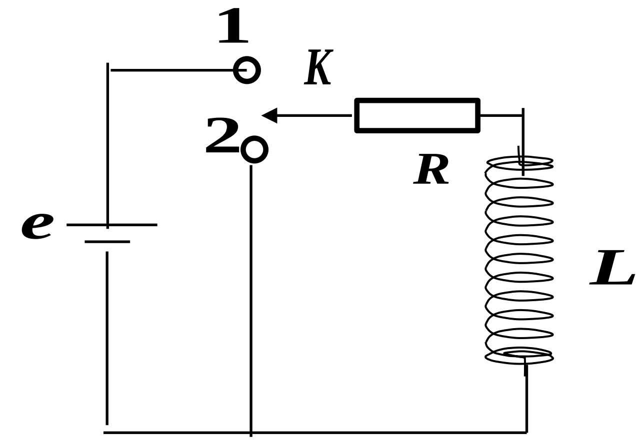
$$e - L\frac{di}{dt} - ri = Ri \quad u(t) = Ri$$

$$si \quad L \equiv 0 \quad et \quad r \equiv 0 \Rightarrow e(t) = u(t) = Ri$$

$$u(t) = u_M \sin wt \Rightarrow i(t) \equiv \frac{u}{R} = \frac{E_M}{R}\sin wt \Rightarrow I_M = \frac{E_M}{R}$$

V - CIRCUIT "R.L "

Le circuit, représenté sur la figure V.10, est constitué d'une résistance R en série avec une bobine d'inductance L. Un inverseur K permet - Soit de relier R et L à une source de courant continu de force électromotrice e - Soit de les mettre en court circuit.



1. Etablissement du courant.

Lorsqu'on met le commutateur sur la position 1, le courant qui traverse la résistance R commence à augmenter. En l'absence de la bobine, le courant atteint rapidement sa valeur d'équilibre i=e/R . Toutefois, en présence de la bobine, une f.é.m d'auto-induction apparaît dans le circuit et, conformément à la loi de Lenz, cette f.é.m s'oppose à l'augmentation du courant. De ce fait, le courant ne s'établit pas instantanément. L'application de la loi des mailles au circuit , permet d'écrire:

$$Ri + L\frac{di}{dt} - e = 0$$

On obtient alors l'équation différentielle suivante : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e}{L}$

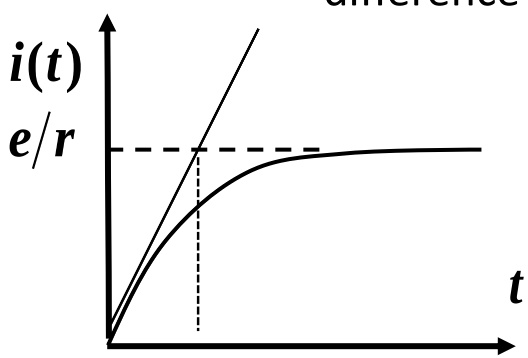
La solution de cette équation est: $i(t) = \frac{e}{L}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ *avec* $\tau = \frac{L}{R}$

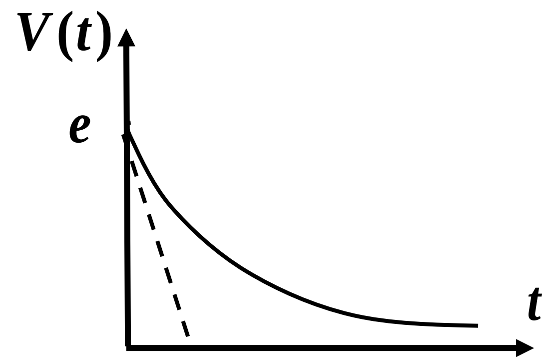
L’expression de la tension aux bornes de la bobine s’obtient par dérivation, soit :

$$V = L\frac{di}{dt} = e\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Cette tension est maximale à la fermeture de l’interrupteur. Pendant l’établissement du courant, elle décroît avec le temps et lorsque le courant est établi, la bobine se comporte comme un fil de résistance négligeable.

Les graphes représentant l’évolution, au cours du temps, du courant et de la différence de potentiel aux bornes de la bobine sont donnés ci-dessous.



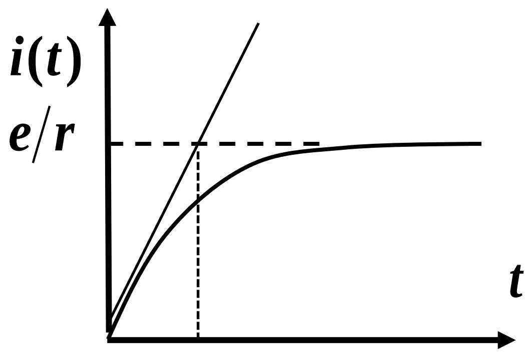


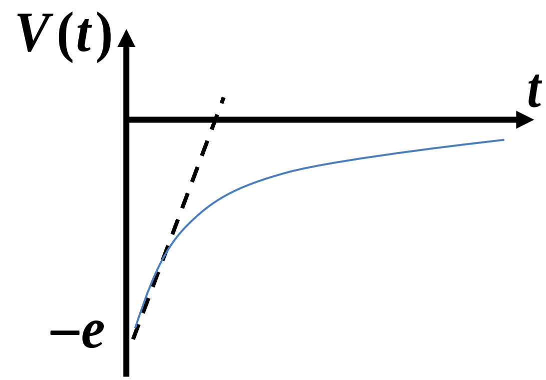
Ces figures mettent en évidence un régime transitoire et un régime permanent. Lorsque le régime permanent est atteint, on a $i = I = \frac{e}{R}$ et $V = 0$

.2. Rupture du courant.

Lorsqu'on met l'inverseur en position 2, on court-cicuite R et L. La loi des mailles, appliquée au circuit obtenu, permet d'écrire :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$





L'équation qui régit alors le courant circulant dans ce circuit est donnée par : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$

C'est une équation différentielle de premier ordre dont la solution est donnée par :

$$i(t) = \frac{e}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad avec \quad \tau = \frac{L}{R}$$

La différence de potentiel aux bornes de la bobine est alors donnée par :

$$V = L\frac{di}{dt} = e\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

.3. Bilan énergétique

Considérons le bilan des énergies depuis la fermeture du circuit jusqu'à l'établissement du courant. En multipliant l'équation de la maille, idt , nous obtenons

$$d\frac{1}{2}(Li^2) + Ri^2dt = eidt$$

$eidt$ représente l'énergie fournie par le générateur entre les instants t et t +dt .

Ri^2dt est l'énergie dissipée dans la résistance R entre t et t+ dt .

$d\frac{1}{2}(Li^2)$ correspond à l'énergie emmagasinée dans la bobine.

Durant l'établissement du courant dans le circuit, le générateur fournit l'énergie : $W_G = \int_0^\infty eidt = LI^2$

Une partie de cette énergie est stockée dans la bobine, soit $W_L = \int_0^\infty d\frac{1}{2}(Li^2) = \frac{1}{2}LI^2$

Le reste est dissipé par effet Joule dans la résistance, soit : $W_R = \int_0^\infty Ri^2dt = \frac{1}{2}LI^2$

Au cours de la rupture du courant, la bobine restitue entièrement l'énergie qu'elle a emmagasinée lors de l'établissement du courant, sous forme de chaleur dans la résistance R . Cette énergie a été stockée par la bobine sous forme magnétique et la restitue sous forme d'énergie électrique.

4. Localisation de l'énergie : Densité d'énergie magnétique.

Considérons le cas d'une bobine dont le coefficient de self induction est : $\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S}$

L'énergie magnétique emmagasinée dans cette bobine est: $W_L = \frac{1}{2} L I^2$

Or le champ magnétique à l'intérieur de la bobine (solénoïde de longueur infinie) est : $B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$

d' où : $W = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} SI$

La densité d'énergie magnétique localisée dans le champ magnétique (région de l'espace située à l'intérieure de la bobine) est : $w = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$

Tableau: Equations de Maxwell en régimes quasi stationnaires

Théorème de Gauss	$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i$	Valable dans tous les cas
Conservation du flux	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	Valable dans tous les cas
Equation Maxwell Ampère	$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$	Valable en régimes quasi stationnaires
Equation Maxwell Faraday	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	Valable dans tous les cas

FIN